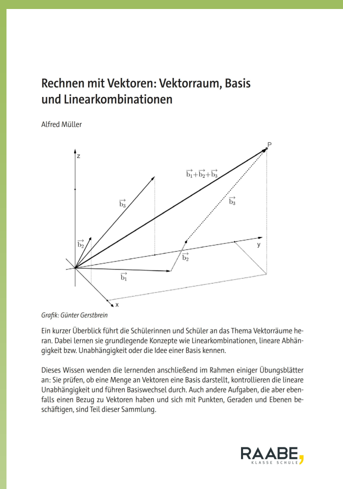
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Rechnen mit Vektoren

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de


Rechnen mit Vektoren: Vektorraum, Basis und Linearkombinationen

Alfred Müller

Grafik: Günter Gerstbrein

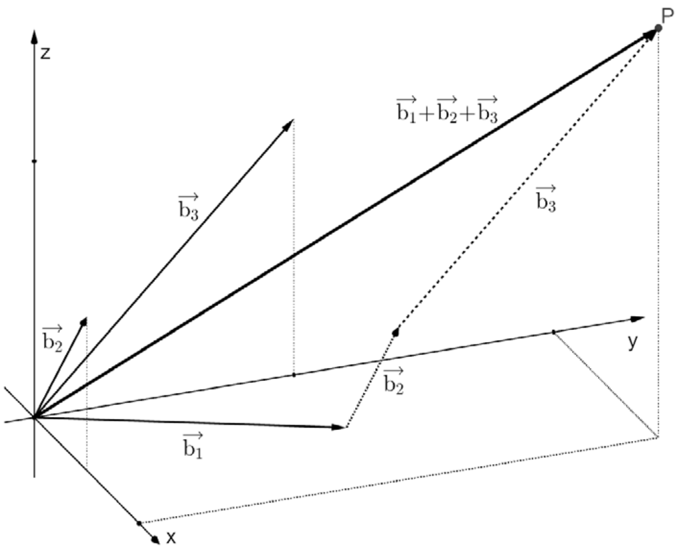
Ein kurzer Überblick führt die Schülerinnen und Schüler an das Thema Vektorräume heran. Dabei lernen sie grundlegende Konzepte wie Linearkombinationen, lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit oder die Idee einer Basis kennen.

Dieses Wissen wenden die lernenden anschließend im Rahmen einiger Übungsblätter an: Sie prüfen, ob eine Menge an Vektoren eine Basis darstellt, kontrollieren die lineare Unabhängigkeit und führen Basiswechsel durch. Auch andere Aufgaben, die aber ebenfalls einen Bezug zu Vektoren haben und sich mit Punkten, Geraden und Ebenen beschäftigen, sind Teil dieser Sammlung.

RAABE, KLASSE SCHULE

Rechnen mit Vektoren: Vektorraum, Basis und Linearkombinationen

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

Ein kurzer Überblick führt die Schülerinnen und Schüler an das Thema Vektorräume heran. Dabei lernen sie grundlegende Konzepte wie Linearkombinationen, lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit oder die Idee einer Basis kennen.

Dieses Wissen wenden die lernenden anschließend im Rahmen einiger Übungsblätter an: Sie prüfen, ob eine Menge an Vektoren eine Basis darstellt, kontrollieren die lineare Unabhängigkeit und führen Basiswechsel durch. Auch andere Aufgaben, die aber ebenfalls einen Bezug zu Vektoren haben und sich mit Punkten, Geraden und Ebenen beschäftigen, sind Teil dieser Sammlung.

RAABE, KLASSE SCHULE

Rechnen mit Vektoren: Vektorraum, Basis und Linearkombinationen

Oberstufe (vertiefend)

Alfred Müller

M1 Der Begriff des Vektorraums **1**

M2 Linearkombination, Basis und Basiswechsel **2**

M3 Aufgaben: Vektoren, Basis, Basiswechsel **5**

M4 Aufgaben: Lineare Abhängigkeit, Ebenen, Schnittgerade **7**

M5 Aufgaben: Basiswechsel, Untervektorraum, Geraden **8**

Lösungen 9

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

mit Vektorräumen zu arbeiten. Sie identifizieren die Basis eines Vektorraums, prüfen lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit und führen Basiswechsel durch. Ferner lösen sie Aufgaben, die sich mit Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Koordinatenraum beschäftigen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt **Info** Informationsblätter

Thema	Material	Methode
Der Begriff des Vektorraums	M1	Info
Linearkombination, Basis, Basiswechsel	M2	Info
Aufgaben: Vektoren, Basis, Basiswechsel	M3	AB
Aufgaben: Lineare Abhängigkeit, Ebenen, Schnittgerade	M4	AB
Aufgaben: Basiswechsel, Untervektorraum, Geraden	M5	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Vektorraum, Basis, lineare (Un-)Abhängigkeit, Basiswechsel, Koordinatenraum, Determinante, Cramersche Regel, Regel von Sarrus, Punkte, Geraden, Ebenen

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Der Begriff des Vektorraums

M1

Ein **Vektorraum** V über $\mathbb{R}$ ist eine Menge, für die folgende Operationen definiert sind:
Vektoraddition: Für zwei beliebige Elemente $\vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt, dass $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$ wieder ein Element des Vektorraums V ist.
Skalarmultiplikation: Für jedes $\vec{v} \in V$ und jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt: $a \cdot \vec{v} = \vec{w} \in V$

Zusätzlich müssen für alle Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und Skalare $a, b \in \mathbb{R}$ folgende **Axiome** erfüllt sein:

Bezüglich der Vektoraddition:

1.	Kommutativgesetz	$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
2.	Assoziativgesetz	$(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$
3.	Es gibt ein Nullelement $\vec{0} \in V$	$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
4.	Für jedes $\vec{v} \in V$ gibt es ein entgegengesetztes (inverses) Element $-\vec{v} \in V$	$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

Bezüglich der Skalarmultiplikation:

1.	Assoziativgesetz	$(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$
2.	Distributivgesetz: Summe von Skalaren mit einem Vektor	$(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$
3.	Distributivgesetz: Skalar mit Summe von Vektoren	$a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$
4.	Es gibt ein Einselement $1 \in \mathbb{R}$	$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Beispiel: Beim zwei- bzw. dreidimensionalen Koordinatenraum $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ handelt es sich um Vektorräume über $\mathbb{R}$.
Anmerkung: Für beliebige Vektorräume kann jeder mathematische Körper K an die Stelle von $\mathbb{R}$ treten, doch im Rahmen dieses Materials beschränken wir uns auf $\mathbb{R}$.

M2 Linearkombination, Basis und Basiswechsel

Linearkombination

Werden Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots \in V$ jeweils mit Skalaren $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ multipliziert und dann addiert, bezeichnet man dies als Linearkombination. Das Ergebnis dieser Summe ist selbst wieder ein Element des Vektorraums: $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} + \ldots = \vec{k} \in V$

Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit

Eine Menge von Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots \in V$ heißt **linear abhängig**, wenn es eine Linearkombination gibt, aus der sich der Nullvektor (das zur Vektoraddition neutrale Element) bilden lässt:

$a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} + \ldots = \vec{0}$, wobei $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und mindestens einer dieser Skalare $\neq 0$ ist.
Gibt es keine solche Linearkombination, sind diese Vektoren **linear unabhängig**.

Beispiele:

1. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig: $3 \cdot \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig: $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hinweise:

1. Zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig, wenn sie parallel zueinander sind.
2. Drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig, wenn entweder alle drei parallel zueinander sind oder einer davon sich als Linearkombination der beiden anderen darstellen lässt (vereinfacht gesprochen: wenn alle drei Vektoren in der gleichen Ebene liegen).

Basis eines Vektorraums

Als Basis eines Vektorraums V bezeichnet man eine kleinstmögliche Teilmenge von V, aus der sich jedes Element von V mittels Linearkombinationen bilden lässt:

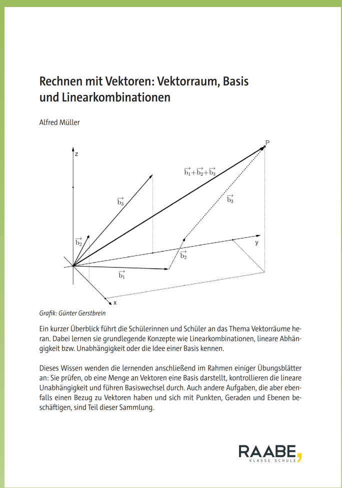
$B = \left\{ \vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}, \ldots \right\}$ ist eine Basis, wenn es für alle $\vec{v} \in V$ Skalare $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}$ gibt, sodass:

$\vec{v} = a_1 \cdot \vec{b_1} + a_2 \cdot \vec{b_2} + a_3 \cdot \vec{b_3} + \ldots$

Dabei sind die Vektoren aus B **linear unabhängig**.

Auszug aus:

Rechnen mit Vektoren



Rechnen mit Vektoren: Vektorraum, Basis und Linearkombinationen

Alfred Müller

Grafik: Günter Gerstbrein

Ein kurzer Überblick führt die Schülerinnen und Schüler an das Thema Vektorräume heran. Dabei lernen sie grundlegende Konzepte wie Linearkombinationen, lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit oder die Idee einer Basis kennen.

Dieses Wissen wenden die lernenden anschließend im Rahmen einiger Übungsblätter an: Sie prüfen, ob eine Menge an Vektoren eine Basis darstellt, kontrollieren die lineare Unabhängigkeit und führen Basiswechsel durch. Auch andere Aufgaben, die aber ebenfalls einen Bezug zu Vektoren haben und sich mit Punkten, Geraden und Ebenen beschäftigen, sind Teil dieser Sammlung.

RAABE, KLASSE SCHULE