Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Mathematisches Argumentieren und Beweisen mit Winkel- und Kongruenzsätzen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

I.D.68

Geometrie

Mathematisches Argumentieren und Beweisen mit Winkel- und Kongruenzsätzen

Marc Eßer

© RAABE 2023

Wenn ... dann ...

© jjpoole/iStock/Getty Images Plus; verändert

Mathematik betreiben, ist mehr als rechnerisches Kalkül. Dass die Mathematik über das bloße Anwenden und Ausrechnen auch Argumentieren bedeutet, rückt immer wieder in den Hintergrund. In dieser Unterrichtseinheit wird das Beweisen und Argumentieren in den Mittelpunkt des Kompetenzerwerbs gestellt. Im Dreischritt Euklids von Behauptung, Voraussetzung und Beweis weisen die Lernenden mithilfe der Winkel- und Kongruenzsätze Zusammenhänge nach. So gelingt es Ihrer Klasse, sprachsensibel das strukturierte Argumentieren einer formal-logischen Beweisführung zu erlernen. Eine hohe Schüleraktivität wird durch Gruppenarbeit erreicht.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	7/8
Dauer:	2 Unterrichtsstunden
Inhalt:	Winkel- und Kongruenzsätze; geometrische Eigenschaften des Dreiecks
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), kommunizieren (K6)

Geometrie

Mathematisches Argumentieren und Beweisen mit Winkel- und Kongruenzsätzen

Marc Eßer

© jjpoole/iStock/Getty Images Plus; verändert

Mathematik betreiben, ist mehr als rechnerisches Kalkül. Dass die Mathematik über das bloße Anwenden und Ausrechnen auch Argumentieren bedeutet, rückt immer wieder in den Hintergrund. In dieser Unterrichtseinheit wird das Beweisen und Argumentieren in den Mittelpunkt des Kompetenzerwerbs gestellt. Im Dreischritt Euklids von Behauptung, Voraussetzung und Beweis weisen die Lernenden mithilfe der Winkel- und Kongruenzsätze Zusammenhänge nach. So gelingt es Ihrer Klasse, sprachsensibel das strukturierte Argumentieren einer formal-logischen Beweisführung zu erlernen. Eine hohe Schüleraktivität wird durch Gruppenarbeit erreicht.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	7/8
Dauer:	2 Unterrichtsstunden
Inhalt:	Winkel- und Kongruenzsätze; geometrische Eigenschaften des Dreiecks
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), kommunizieren (K6)

Didaktisch-methodisches Konzept

Mathematik betreiben, ist mehr als rechnerisches Kalkül. Es wird dadurch deutlich, dass das Betreiben von Mathematik eine argumentative Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten ist. Aufgrund ihrer domänenspezifischen und theoretischen Vorstrukturierung bietet sich die Mathematik besonders an, sprachsensibel das strukturierte Argumentieren einer formal-logischen Beweisführung zu erlernen.

Um was geht es inhaltlich?
Sebastian Kuntze stellte bereits in „Geometrische Beweiskompetenz fördern durch Reflexions- und Schreibanlässe zu beweisbezogenem Metawissen" fest, dass bei Lernenden in der Sekundarstufe wiederholt Defizite in Kompetenzen des geometrischen Beweisens und Argumentierens beobachtet wurden. Um ein Grundverständnis über das Beweisen als mathematische Aktivität zu erlernen, brauche es daher Gelegenheit zur Reflexion über das Beweisen, das durch Schreibanlässe vertieft werden könne, um beweisbezogenes Metawissen aufzubauen.
Der theoretische Hintergrund zum Methodenwissen zum mathematischen Beweisen wurde von Heinze/Reiss charakterisiert und umfasst die drei Unteraspekte „Beweisschema", „Beweisstruktur" und „logische Kette". Dieses Methodenwissen muss den Lernenden Stück für Stück vermittelt und deren reflektierte Anwendung beim Lösen der Probleme eingeübt werden. Dieser theoretische Hintergrund wird um die „Expertenmodelle" und das „Wissen über die Funktion des Beweisens" ergänzt (siehe Mediathek).
Für das Beweisen in der Geometrie wurden Kompetenzmodelle ausgearbeitet, die in drei Kompetenzniveaus unterschieden werden:

1. Einfaches Anwenden von Regeln
2. Begründen und Argumentieren: Begründung mithilfe bestehender Sätze in neuen Zusammenhängen (einschrittig)
3. Begründen und Argumentieren (mehrschrittig), das heißt mit Verknüpfung mehrerer Argumente zum Beispiel die Ausarbeitung eines Kongruenzbeweises

An dieses höchste Kompetenzniveau sollen die Lernenden in der hier ausgearbeiteten Stunde herangeführt werden. Dabei werden die theoretischen Unteraspekte zum oben genannten Methodenwissen im Material der Unterrichtsstunde eingearbeitet. Dies geschieht durch das Scaffolding, die farbliche Unterscheidung im Material und das exemplarische Lernen am Expertenmodell aus der gemeinsamen Erarbeitung des Basiswinkelsatzes. Die Studien von Reiss empfehlen den Aufbau von beweisbezogenem Metawissen, das durch die Materialanlage und die vorgegebene Struktur auf dem Sicherungsarbeitsblatt in die Struktur Satz, Voraussetzung und Beweisschritte gliedert. Außerdem wird das erforderliche Metawissen auf sprachlicher Ebene durch die geplante sprachsensible Durchführung der Stunde bereits im Einstieg gefördert und die Erkenntnisse der Studie damit angewandt.

Wie ist die Unterrichtseinheit aufgebaut?
Das Unterrichtsvorhaben erfolgt, aus der Makroperspektive betrachtet, in Teilen dem PADUA-Prinzip sowie dem Lehr-Lern-Modell Leisens. Beide Modelle verstehen den Lernprozess als das Lösen von Problemen und sind konstruktivistischen Lehr-Lern-Modellen ähnlich. Diese haben aufgrund ihrer Problemorientierung den Vorteil, dass sie einen sinnstiftenden Verlauf durch die Stunde konstituieren, an dem sich die Lernenden leicht orientieren können. Das Problemlösen zeigt außerdem eine hohe Effektstärke auf den Lernerfolg in der Hattie-Studie.

Der **Einstieg** (**M 1**) dient daher der Erarbeitung eines sprachsensiblen Ausdrucks einer Argumentationsstruktur, die eine Behauptung unter bestimmten Voraussetzungen in der Struktur „Wenn ..., dann ...“ aufstellt und vor dessen Problem, der Verifizierung jener Aussage, die Lernenden danach gestellt werden. Der Einstieg leistet, durch das gewählte Beispiel, die Fachsprache der Mathematik sprachsensibel anhand lebensweltnaher Probleme zu erarbeiten. Dies erleichtert den Lernenden den Einstieg in die Konstruktion aufeinanderfolgender logischer Aussagen.
Im zweiten Schritt kann das Material **M 2** vorgestellt werden, anhand dessen Sie den Basiswinkelsatz gemeinsam mit den Lernenden erarbeiten. Hier findet die Übertragung der Alltagssprache in Fachsprache statt. Außerdem werden Beweisstrategien hier deutlich. Die unterschiedlichen Farben markieren für die Lernenden sichtbar, dass es sich um unterschiedliche Sinnstrukturen des Beweises: Satz, Voraussetzung und Beweisschritte handelt.

In der **Erarbeitung** (**M 3–M 5**) wird eine hohe Schüleraktivität durch die Gruppenarbeit auf der einen und die individuelle Sicherung auf dem Arbeitsblatt zum anderen eingefordert.
Die Entscheidung für eine Gruppenarbeit folgt dem dialogischen Prinzip nach Gallin und Ruf, weil sie die Kommunikation und Sprache der Lernenden über das Problem und die Mathematik im Sinne eines sprachfördernden Unterrichts unterstützt. Außerdem bietet die Gruppenarbeit Platz für Fehler, eigene Ideen und Elemente des Lernens im Sinne des „Lernens durch Lehren“-Modells. Die Lernenden erklären sich gegenseitig Beweisschritte und klären untereinander Verständnisfragen bspw. zur Symbolik.
Gleichzeitig werden mithilfe des Materials mehrere Darstellungsebenen (enaktiv – ikonisch – symbolisch) im Sinne des EIS-Prinzip nach Bruner angeregt. Dadurch wenden die Lernenden Wechsel der Darstellungsformen an, die besonders förderlich für das mathematische Verständnis sind.
Auf der enaktiven Ebene setzen sich die Lernenden handelnd mit dem Material auseinander, das in eine logische Struktur und Abfolge (Satz, Voraussetzung, Beweisschritte) gebracht werden muss. Dieses Material muss gelegt und die Position mit den anderen Lernenden ausgehandelt werden. Dabei müssen die Inhalte verbalisiert werden.
Die Inhalte sind zum einen durch Skizzen ikonisch dargestellt, aber auch hinter den mathematischen Symbolen sind Argumente kodifiziert. Es gilt für die Lernenden, die symbolisch beschriebenen Argumente mit den ikonischen Darstellungen zu verbinden, um das Problem sachgerecht zu erfassen und weiterhin mit den anderen Lernenden die Strukturabfolge auszuhandeln, wobei die ikonisch-symbolischen Ebenen verbalisiert werden müssen.
Das Material und die Aufgabenstellung folgen dem Scaffolding-Prinzip. Während der Beweis des Satz 1 noch im Wesentlichen durch das alleinige Legen der Struktur erarbeitet werden kann und nur wenige Lücken ergänzt werden müssen sowie das Legen der Struktur farblich unterstützt wird, werden in Satz 2 bereits einige dieser Hilfestellungen abgebaut. Hier müssen sich die Lernenden zur Strukturierung selbstständig mit den Bestandteilen auseinandersetzen und diese Bestandteile einer semantisch-logischen Struktur zuordnen. Die materielle Unterstützung in Satz 1 ist aufgrund des bereits in der Reihenplanung beschriebenen Neuigkeitswertes des Umgangs mit einer mathematischen Argumentation für alle Gruppen notwendig. In dem hier verlangten Maße setzen sich die Lernenden nur sehr selten mit mathematischen Sätzen auseinander. Zur Einführung in die Erarbeitung ist das Material daher niedrigschwellig für alle Lernenden. Dies führt zu schnellen Erfolgserlebnissen in der Gruppe und motiviert die Weiterarbeit mit Satz 2.
In Satz 3 werden schließlich jegliche Hilfen abgebaut. Im Sinne einer Binnendifferenzierung nach Leistung werden hier die leistungsstarken Lernenden gefordert, einen Beweis selbstständig zu formulieren. Lediglich die ikonische Darstellung der Behauptung unterstützt das Verständnis der Situation.

Neben dem Material werden alle Aufgaben durch Hinweise oder Tipps für leistungsschwächere Lernende bzw. einen niedrigschwelligen Einstieg differenziert. Dies führt zu einer möglichst selbstständigen Beschäftigung mit den vorliegenden Aufgaben.
Die an die Startinformationen anschließenden Lösungswege zur Begründung können in der Reihenfolge voneinander abweichen und gerade in Satz 3 ist die Kreativität der Begründungen seitens der Lernenden zur Lösung des Problems von ihren individuellen Wissensbeständen abhängig. Mehrere richtige Argumentationsketten sind hier zum Beleg der Behauptung möglich. Das führt zu einer Offenheit der Aufgabe, die fachliche Kreativität erforderlich macht.
Eine mögliche Alternative wäre die Präsentation verschiedener Sätze, die in unterschiedlichen Gruppen erarbeitet werden. Jedoch besteht die Gefahr, dass die Präsentationsphase statt einer Sicherung des Gelernten eine Überforderung für viele Lernenden darstellt, da das Nachvollziehen einer fremden Argumentationsstruktur durch die Präsentation einer Gruppe die meisten Lernenden vor große Schwierigkeiten stellen würde. Deshalb erhalten alle Gruppen dasselbe Material. Die Lernenden sind nicht geübt im Umgang mit mathematischen Beweisstrukturen, sodass eine Kurzpräsentation eher zu einer routinierten Übung anstelle einer echten Auseinandersetzung verkommen würde.

Die **Sicherungsphase** gestaltet sich demnach als Plenumsphase, in der einzelne Gruppen ihre Argumentation vor der Klasse vortragen und das Plenum die eigenen Lösungen abgleicht bzw. alternative Argumentationen vorstellt oder fehlerhafte Darstellungen korrigiert. Durchaus ist die Reihenfolge der Argumentationen nicht immer eindeutig, sodass in der Sicherung die Richtigkeit der Argumentationen begründet geprüft werden sollte. Das bringt die Lernenden miteinander im Plenum ins Fachgespräch.

Die **Transferphase** besteht darin, dass besonders leistungsstarke Gruppen, die bereits eine eigene Argumentation in Satz 3 entwickelt haben, ihre Beweisschritte vorstellen. Sie wenden die gelernten Strukturen auf ein neues Problem an, ohne dass ihnen Hilfen in einer bereits vorstrukturierten Form zur Verfügung stehen. Diese Phase hängt von der Geschwindigkeit der Gruppen und der kognitiven Leistung ab und wird daher als „Eventualphase“ gekennzeichnet, da diese besondere Leistung im Anforderungsbereich III möglicherweise die vorherige Sicherungsphase notwendig macht, damit die Lernenden in dem höchsten Anforderungsbereich arbeiten können. Hier agieren Sie als Lehrkraft flexibel auf das Unterrichtsgeschehen. Alternativ kann die Transferphase auch als wiederholender Einstieg in der nächsten Stunde genutzt werden, sodass mit den Ergebnissen im weiteren Verlauf der Reihe flexibel umgegangen werden kann und eine Wertschätzung der Lernenden-Arbeit in jedem Fall erfolgt.

Was muss bekannt sein?
Die Lernenden sollten in vorangegangenen Unterrichtsstunden bereits die Kongruenzsätze erarbeitet und mithilfe dieser erste einfache Sachverhalte argumentativ begründet haben.
Diese sind im Material **M 7** allerdings nochmal übersichtlich zusammengefasst. Das Material kann daher schwächeren Lernenden als Hilfe dienen. Außerdem sollten die Lernenden in der Anwendung der Winkelsätze geübt sein.

Diese Kompetenzen trainieren die Lernenden

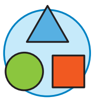
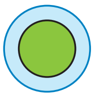
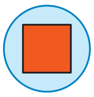
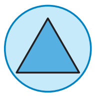
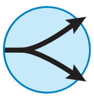
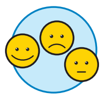
Die Lernenden

- argumentieren mathematisch (K 1), indem sie Lösungswege begründen und dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente nutzen, Argumente zu Argumentationsketten verknüpfen, beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind, lückenhafte und fehlerhafte Argumentationsketten ergänzen bzw. korrigieren
- kommunizieren (K 6), indem sie Arbeitsschritte nachvollziehbar dokumentieren und präsentieren, Beiträge aufgreifen und sie weiterentwickeln.

Die prozessbezogenen Kompetenzen erweitern die Lernenden anhand der inhaltsbezogenen Kompetenzen im Bereich der Geometrie mit dem Schwerpunkt des Lösens geometrischer Probleme mithilfe von Winkel- und Kongruenzsätzen, indem sie

- Winkel- und Kongruenzsätze benennen und anwenden,
- geometrische Eigenschaften des Dreiecks, wie die Höhe in Dreiecken und Mittelpunkte der Seiten, untersuchen,
- die geometrischen Eigenschaften des Dreiecks zur Verallgemeinerung innerhalb von Gruppen von Dreiecken nutzen und Folgerungen spezieller Eigenschaften in den Gruppen herleiten.

Erklärung zu den Symbolen

	Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.				
	einfaches Niveau		mittleres Niveau		schwieriges Niveau
	Zusatzaufgaben		Alternative		Selbsteinschätzung

Mediathek

- Aebli, Hans, Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Stuttgart, 2003 und Leisen, Josef, Handbuch Sprachförderung im Fach, Stuttgart, 2013. S. 56, 75.
- Barzel, Bärbel u. a., Gruppenarbeit in: Mathematik Methodik, Berlin, 2018. S. 84–90. Insbesondere S. 84–85.
- Boero, P., Argumentation and mathematical proof: a complex, productive, un-avoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7/8, 1999.Kuntze, Sebastian, Geometrische Beweiskompetenz fördern durch Reflexions- und Schreibanlässe zu beweisbezogenem Metawissen, in: Matthias Ludwig, Reinhard Oldenburg, Jürgen Roth (Hrsg.): Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht AK Geometrie 2007/08. S. 219.
- Kuntze, Sebastian. „Wozu muss man denn das beweisen?" Vorstellungen zu Funktionen des Beweisens in Texten von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe. In: mathematica didactica, 28(2), S. 48–70. 2005.
- Kuntze, Sebastian, Geometrische Beweiskompetenz fördern durch Reflexions- und Schreibanlässe zu beweisbezogenem Metawissen, in: Matthias Ludwig, Reinhard Oldenburg, Jürgen Roth (Hrsg.): Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht AK Geometrie 2007/08. S. 219
- Laumeyer, Ulrike, Lernen durch Lehren – Schüler halten Unterricht. Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Unterricht (MNU), 53,3, 2000.
- Sturm, Ronald, Schritt für Schritt, S. 160 und Gallin, Peter, Ruf, Urs, Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Seelze/Velber. 1998.
- Sturm, Ronald, Schritt für Schritt, S. 157 ff. Hier bezieht sich das Scaffolding auf das Prinzip des entdeckenden Lernens nach Winter 1991, wodurch Stufungen notwendig werden, da Aufgaben und Hilfen dem Prinzip der minimalen Hilfe folgen.
- Zierer, Klaus, Hattie für gestresste Lehrer, Hohenbergen, 2014. S. 128.

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt; Tk = Tippkarten; Üb = Übersicht
Planung für 2 Stunden

Einstieg

Thema:	**Grundlagen: Wenn ... , dann ... – Sprachsensibles Argumentieren**
M 1 (Ab)	„Wenn ..., dann ...“ – Beweisstrukturen sprachlich erfassen
M 2 (Ab)	Der Basiswinkelsatz – Beweis

Erarbeitung

Thema:	**Materialgestütztes Beweisen mathematischer Sätze in kooperativer Gruppenarbeit**
M 3 (Ab)	Beweis Satz 1
M 4 (Ab)	Beweis Satz 2
M 5a (Ab)	Beweis Satz 3
M 5b (Tk)	Tippkarten zur Differenzierung von Satz 3

Ergebnissicherung

Thema:	**Übersicht der 4 Sätze**
M 6 (Üb)	Übersicht der 4 Sätze – Satz, Voraussetzung, Beweis

Wiederholung

Thema:	**Wiederholung der Kongruenzsätze**
M 7 (Üb)	Kongruenzsätze in der Übersicht

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 18.

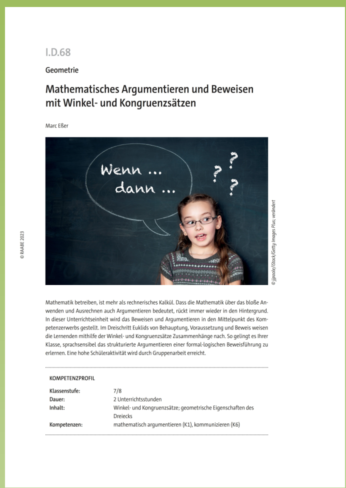
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Mathematisches Argumentieren und Beweisen mit Winkel- und Kongruenzsätzen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



I.D.68

Geometrie

Mathematisches Argumentieren und Beweisen mit Winkel- und Kongruenzsätzen

Marc Eßer

© jjpoole/iStock/Getty Images Plus; verändert

© RAABE 2023

Mathematik betreiben, ist mehr als rechnerisches Kalkül. Dass die Mathematik über das bloße Anwenden und Ausrechnen auch Argumentieren bedeutet, rückt immer wieder in den Hintergrund. In dieser Unterrichtseinheit wird das Beweisen und Argumentieren in den Mittelpunkt des Kompetenzerwerbs gestellt. Im Dreischritt Euklids von Behauptung, Voraussetzung und Beweis weisen die Lernenden mithilfe der Winkel- und Kongruenzsätze Zusammenhänge nach. So gelingt es Ihrer Klasse, sprachsensibel das strukturierte Argumentieren einer formal-logischen Beweisführung zu erlernen. Eine hohe Schüleraktivität wird durch Gruppenarbeit erreicht.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	7/8
Dauer:	2 Unterrichtsstunden
Inhalt:	Winkel- und Kongruenzsätze; geometrische Eigenschaften des Dreiecks
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), kommunizieren (K6)