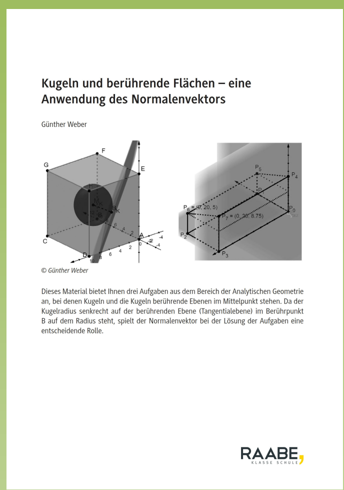
Auszug aus:

Kugeln und berührende Flächen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Kugeln und berührende Flächen – eine Anwendung des Normalenvektors

Günther Weber

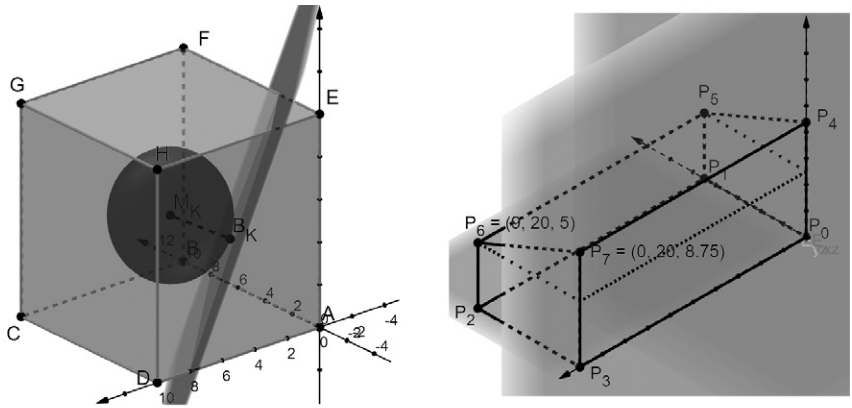
© Günther Weber

Dieses Material bietet Ihnen drei Aufgaben aus dem Bereich der Analytischen Geometrie an, bei denen Kugeln und die Kugeln berührende Ebenen im Mittelpunkt stehen. Da der Kugelradius senkrecht auf der berührenden Ebene (Tangentialebene) im Berührpunkt B auf dem Radius steht, spielt der Normalenvektor bei der Lösung der Aufgaben eine entscheidende Rolle.

RAABE, KLASSE SCHULE

Kugeln und berührende Flächen – eine Anwendung des Normalenvektors

Günther Weber



© Günther Weber

Dieses Material bietet Ihnen drei Aufgaben aus dem Bereich der Analytischen Geometrie an, bei denen Kugeln und die Kugeln berührende Ebenen im Mittelpunkt stehen. Da der Kugelradius senkrecht auf der berührenden Ebene (Tangentialebene) im Berührpunkt B auf dem Radius steht, spielt der Normalenvektor bei der Lösung der Aufgaben eine entscheidende Rolle.

Kugeln und berührende Flächen – eine Anwendung des Normalenvektors

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Günther Weber

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der Analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem sicher anzuwenden. Sie bestimmen Mittelpunkte und Radien von Kugeln, jeweils den Berührpunkt von Kugel und Ebene sowie die Gleichungen der berührenden Ebenen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab Arbeitsblatt **Info** Informationsblatt

einfaches Niveau mittleres Niveau schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Hessesche Normalenform der Ebenengleichung und Kugelgleichung	M1	Info
Hängende Kugel im Würfel und berührende Ebenen	M2	Ab
Kugelförmiger Behälter auf dem Dachboden	M3	Ab
Kugel und schiefe Ebene	M4	Ab

Kompetenzprofil:

Inhalt: Kugel, Tangentialebene, Normalenvektor, Ebenengleichung (Parameterform, Koordinatenform, Hessesche Normalenform), Geradengleichung (Zwei-Punkte-Form, Punkt-Richtungs-Form), winkelhalbierende Ebene, Winkel zwischen zwei Ebenen, Schnittpunkt mit Ebenen, Abstand von Punkten, Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck, Satz des Pythagoras, Würfel, Kegel (Volumen, Oberfläche)

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkte-Form bzw. Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung sowie die (Hessesche) Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene bereitet ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen können mit den Methoden der Analytischen Geometrie Abstandsberechnungen und Winkelberechnungen durchführen sowie das Volumen von Pyramiden und Kegel ermitteln. Die Kugelgleichung muss nicht bekannt sein.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen
https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf
(aufgerufen am 13.12.2022) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

Die Schülerinnen und Schüler …

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

In einigen Bundeländern finden sich auch Kompetenzerwartungen, die direkt Kugeln und Ebenen betreffen, z. B. in Hessen:

https://kultusministerium.hessen.de/sites/kultusministerium.hessen.de/files/2021–07/kcgo-m.pdf (aufgerufen am 13.12.2022)

- Darstellen von Kugeln mit Vektor- und Koordinatengleichungen.
- Untersuchen der Lagebeziehungen zwischen Kugeln und Geraden sowie zwischen zwei Kugeln, beschreiben realer Objekte mittels Kugeln.
- Untersuchen der Lagebeziehungen zwischen Kugeln und Ebenen.
- Bestimmen der Schnittmengen zwischen Kugeln und Ebenen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zur Veranschaulichung der Aufgabenstellung und zur Überprüfung der Ergebnisse.

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Die Aufgaben der Materialien M2 – M4 bauen nicht aufeinander auf, daher können Sie sie zeitlich versetzt oder auch in einer anderen Reihenfolge im Unterricht einsetzen. Es ist aber auch möglich, die Aufgaben der Materialien für ein Referat/einen Vortrag durch die Lernenden zu nutzen.

Das Informationsblatt M1 kann laminiert und ausgelegt oder als Kopie an die Schülerinnen und Schüler verteilt werden.

Anmerkungen zu „Hängende Kugel im Würfel und berührende Ebenen"

Vor der Bearbeitung von Aufgabenteil 1b) geben Sie den Lernenden den Hinweis, dass sie die Abbildung mit Würfel und Ebene genau betrachten sollen. Bei schwächeren Lerngruppen werden die beiden Teilkörper, die bei der Teilung durch die Ebene entstehen, beschrieben. Evtl. geben Sie die Volumenformel für einen Pyramidenstumpf vor. Bei Aufgabenteil 2a) kann bei leistungsschwächeren Lerngruppen die Skizze zur Berechnung des Kreisradius gemeinsam entwickelt werden. Bevor die Jugendlichen Aufgabe 3) beginnen, wiederholen Sie die Begriffe Spurpunkt und Spurgerade.

Anmerkungen zu „Kugelförmiger Behälter auf dem Dachboden"

Um den Kugelradius zu bestimmen gibt es verschiedene Lösungswege, die Sie vorher im Unterricht entwickeln. Anschließend bearbeiten die Gruppen die Aufgabe mithilfe der verschiedenen Ansätze. Die Lösung mithilfe der winkelhalbierenden Ebenen sollte durch eine leistungsstärkere Lerngruppe erfolgen.

Anmerkungen zu „Kugel und schiefe Ebene"

Zuvor veranschaulichen Sie das Rollen des Balles z. B. mithilfe eines Zeichenblocks auf einem Tisch und einem Tennisball. Insbesondere wird hierbei klar, dass die sogenannte Falllinie senkrecht zur Schnittgeraden von Zeichenblock und Tisch steht. Bei Aufgabe 3) klären Sie, dass das Einzeichnen einer Ebene in einem räumlichen Koordinatensystem durch die Spurgeraden geschieht. Aufgabe 5) lösen die Jugendlichen gruppenweise entweder mithilfe von Einheitsrichtungsvektoren oder mit Ebenen in der Hesseschen Normalenform.

Hessesche Normalenform der Ebenengleichung und Kugelgleichung

M1

Normalenvektor

Einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf einer Ebene im Raum (im $\mathbb{R}^3$) oder auf einer Gerade in der Ebene (im $\mathbb{R}^2$) steht, nennt man Normalenvektor.

Normiert man den Normalenvektor $\vec{n}$ auf die Länge eins, indem man den Vektor mit dem Kehrwert des Betrags des Vektors multipliziert ($\vec{n}_e = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$), so spricht man von einem Normaleneinheitsvektor.

Hessesche Normalenform der Ebenengleichung

Ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene E und P ein Punkt der Ebene E, so lautet die Punkt-Normalenform der Ebene $E: \vec{n} \circ \vec{x} - \vec{n} \circ \vec{p} = 0$ Ersetzt man in der Ebenengleichung den Normalenvektor durch den Einheitsnormalenvektor

$E: \vec{n}_e \circ \vec{x} - \vec{n}_e \circ \vec{p} = 0$

und multipliziert das Skalarprodukt $\vec{n}_e \circ \vec{p}$ aus, so erhält man die Hessesche Normalenform der Ebenengleichung

$E: \vec{n}_e \circ \vec{x} - d = 0$

Hierbei gibt $|d|$ den Abstand der Ebene zum Ursprung an. Ist $d = 0$, so verläuft die Ebene durch den Ursprung.

Ist $d > 0$, so zeigt der vom Ursprung aus angetragene Normalenvektor zur Ebene hin, bei $d < 0$ zeigt der vom Ursprung aus angetragene Vektor von der Ebene weg.

Kugelgleichung:

Ist r der Radius und $M(m_1 \mid m_2 \mid m_3)$ der Mittelpunkt einer Kugel, so lautet die Gleichung der Kugel

$k: (x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 + (z - m_3)^2 = r^2$

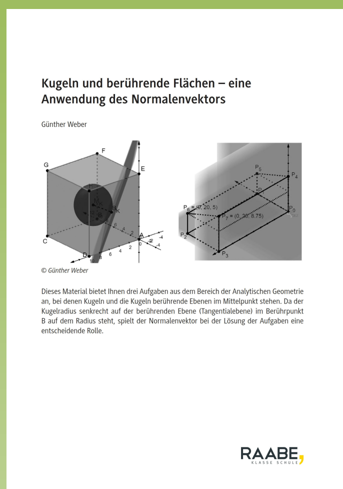
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Kugeln und berührende Flächen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Kugeln und berührende Flächen – eine Anwendung des Normalenvektors

Günther Weber

© Günther Weber

Dieses Material bietet Ihnen drei Aufgaben aus dem Bereich der Analytischen Geometrie an, bei denen Kugeln und die Kugeln berührende Ebenen im Mittelpunkt stehen. Da der Kugelradius senkrecht auf der berührenden Ebene (Tangentialebene) im Berührpunkt B auf dem Radius steht, spielt der Normalenvektor bei der Lösung der Aufgaben eine entscheidende Rolle.

RAABE