

SCHOOL-SCOUT.DE



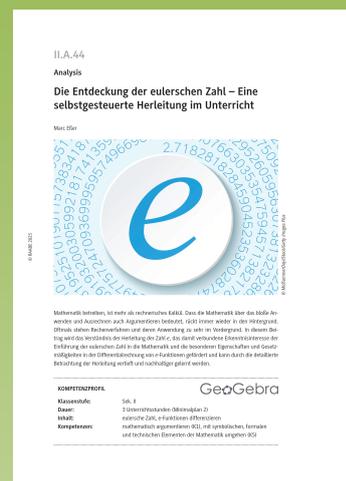
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Analysis: Die Entdeckung der eulerschen Zahl

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)



II.A.44

Analysis

Die Entdeckung der eulerschen Zahl – Eine selbstgesteuerte Herleitung im Unterricht

Marc Eßer



© RAABE 2023

© MiaSummerDay/iStock/Getty Images Plus

Mathematik betreiben, ist mehr als rechnerisches Kalkül. Dass die Mathematik über das bloße Anwenden und Ausrechnen auch Argumentieren bedeutet, rückt immer wieder in den Hintergrund. Oftmals stehen Rechenverfahren und deren Anwendung zu sehr im Vordergrund. In diesem Beitrag wird das Verständnis der Herleitung der Zahl e , das damit verbundene Erkenntnisinteresse der Einführung der eulerschen Zahl in die Mathematik und die besonderen Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten in der Differentialrechnung von e -Funktionen gefördert und kann durch die detaillierte Betrachtung der Herleitung vertieft und nachhaltiger gelernt werden.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	Sek. II
Dauer:	3 Unterrichtsstunden (Minimalplan 2)
Inhalt:	eulersche Zahl, e -Funktionen differenzieren
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

GeoGebra

Didaktisch-methodisches Konzept

Mathematik betreiben, ist mehr als rechnerisches Kalkül. Dass die Mathematik über das bloße Anwenden und Ausrechnen auch Argumentieren bedeutet, rückt immer wieder in den Hintergrund. Oftmals stehen Rechenverfahren und deren Anwendung zu sehr im Vordergrund.

Das Verständnis der Herleitung der Zahl e , das damit verbundene Erkenntnisinteresse der Einführung der eulerschen Zahl in die Mathematik und die besonderen Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten in der Differentialrechnung von e -Funktionen kann durch die detaillierte Betrachtung der Herleitung vertieft und nachhaltiger gelernt werden. Es wird dadurch deutlich, dass das Betreiben von Mathematik, eine argumentative Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten ist.

Um was geht es inhaltlich?

Die Lernenden erkunden die Operationen des Potenzierens, des Wurzelziehens und der Anwendung des Logarithmus als zueinander inverse Operationen.

Die Herleitung der eulerschen Zahl und die daraus resultierenden Ergebnisse und Folgerungen betreffen die folgenden inhaltlichen Kompetenzerwartungen für die Sekundarstufe II:

- Das Bilden der Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion
- Das Beschreiben der Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion
- Das Anwenden der Ableitungsregeln auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen

Dies bildet das Fundament dafür, das Umschreiben von Exponentialfunktionen in natürliche Exponentialfunktionen sowie das Bilden der Ableitung und das Finden von Stammfunktionen in darauf folgenden Unterrichtseinheiten sicher meistern zu können.

Wie ist die Unterrichtseinheit aufgebaut?

Mit der **Lernstandsdiagnose** „Potenzieren, Logarithmieren und Radizieren“ (**M 1**) ermitteln Sie die grundlegenden Kenntnisse zum Potenzieren, Logarithmieren und Radizieren des Kurses. Durch die geforderte Versprachlichung der Operationen wird deutlich, inwiefern die Lernenden in der Lage sind, mathematische Gleichungen zu erklären, um zu formulieren, was operativ in der Gleichung von ihnen verlangt wird. Durch diese diagnostische Übung werten Sie aus, inwiefern die drei genannten Operationen konzeptionell in ihrer Bedeutung bereits durchdrungen sind. Die Übung wird im Gruppenpuzzle durchgeführt, damit die Lösungen auch tatsächlich verbalisiert werden müssen, wodurch die Anwendung im Rahmen der Kommunikation sinnstiftend umgesetzt wird.

Den **Einstieg** zur Herleitung der eulerschen Zahl bildet das Arbeitsblatt beziehungsweise der Bildimpuls „Ableitungen der Exponentialfunktionen“ (**M 2**). Die Lernenden sollen möglichst selbstständig und damit dem Prinzip des entdeckenden Lernens folgend, Vermutungen zu möglichen Regelmäßigkeiten im Differenzieren algebraisch und graphisch aufstellen. Damit wird im Sinne eines wissenschaftspropädeutischen Vorgehens von einzelnen Fallbeispielen ausgehend der Abstraktionsgrad schrittweise erhöht. Die Lernenden werden selbstwirksam ihre aufgestellten Hypothesen überprüfen. Als Methode bietet sich an dieser Stelle „Think-Pair-Share“/„Ich-Du-Wir“, um allen Lernenden die Chance zu geben, darüber nachzudenken.

Die **Erarbeitung** der Frage „Woher stammt die Zahl e ?“ (**M 3a–M 3c**) erfolgt in Gruppenarbeit. Die Lernenden leiten die eulersche Zahl mithilfe der Materialien her und folgern aus den Zusammenhängen die Ableitung einer e -Funktion.



Den Lernenden soll dabei die Möglichkeit des selbstentdeckenden Lernens gegeben werden. Die Materialien können dabei als Hilfsstruktur gesehen werden, die Sie durch diesen Prozess führt: „Schritt 1: Die Ableitung einer einfachen Exponentialfunktion herleiten“ (**M 3a**), „Schritt 2: Die Ableitung einer allgemeinen Exponentialfunktion herleiten“ (**M 3b**) und „Schritt 3: Die Entdeckung von e “ (**M 3c**). Zur Erledigung können die Lernenden nicht nur Rechenaufgaben immer wieder auf mehrere Personen verteilen und dadurch effizient in einer Gruppe arbeiten, auch das Verständnis, gemeinsam Schritt für Schritt und im Team vorzugehen, wird hierdurch im Rahmen der Gruppenarbeit geschult. Immer wieder formulieren die Lernenden Vermutungen oder überprüfen ihre Ergebnisse. Alternativ ließe sich die Erarbeitung auch als **Escape Room Game** mit der eulerschen Zahl als „Code“ für ein Schloss gamifizieren.

Die **Ergebnissicherung** besteht zum einen aus **M 3c** und wird nach Abschluss der Erarbeitung eingesetzt. Zum anderen stellt das Merkblatt „Definitionen und Folgerungen im Zusammenhang mit der Zahl e “ (**M 4**) darauf aufbauend Folgerungen dar, die in der darauffolgenden Übungsphase angewendet werden müssen. Hier wird außerdem die Möglichkeit gegeben, weitere (Zwischen-)Ergebnisse und das methodische Vorgehen zu reflektieren und zu verschriftlichen. Diese Folgerungen werden zur Orientierung anhand von Beispielen schülerorientiert dargestellt, sodass ein einfacher Einstieg in die Übungsphase gelingt.

Zur **Übung, Vertiefung und Anwendung** ist das Arbeitsblatt „ e -Funktion – anwenden, vertiefen, vernetzen“ (**M 5**) einzusetzen. Hier werden die aus **M 1** erkannten Zusammenhänge sowie die hergeleiteten Ergebnisse der Erarbeitung und die in **M 4** zusammengefassten Ergebnisse und Folgerungen angewendet.

Was muss bekannt sein?

Die Bearbeitung setzt Kenntnisse über die Herleitung der Ableitung einer Funktion mithilfe des Differentialquotienten sowie Basiskennnisse über das Potenzieren und Radizieren voraus.

Diese Kompetenzen trainieren die Lernenden

Die Lernenden

- argumentieren mathematisch (K 1), indem sie mithilfe des Argumentationsgerüsts die Herleitung der eulerschen Zahl nachvollziehen.
- gehen mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik um (K 5), indem sie die Struktur der Herleitung vervollständigen und die Bedeutung der einzelnen Schritte für das Lösen der darauf aufbauenden Schritte nachvollziehen.

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt; Mb = Merkblatt

Planung für 3 Stunden

Einstieg

Thema: Grundlagen: Exponentialfunktion – Operationen und Ableitung

M 1 (Ab) Potenzieren, Logarithmieren und Radizieren

M 2 (Ab) Ableitungen von Exponentialfunktionen zuordnen

Erarbeitung

Thema: Die Herleitung der Zahl e

M 3a (Ab) Schritt 1: Die Ableitung einer einfachen Exponentialfunktion herleiten

M 3b (Ab) Schritt 2: Die Ableitung einer allgemeinen Exponentialfunktion herleiten

M 3c (Ab) Schritt 3: Die Entdeckung von e



Ergebnissicherung

Thema: Folgerungen nach Einführung der eulerschen Zahl

M 4 (Mb) Definitionen und Folgerungen im Zusammenhang mit der Zahl e

Übung

Thema: Wissen zur e -Funktion anwenden

M 5 (Ab) e -Funktion – anwenden, vertiefen, vernetzen

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 14.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für zwei Stunden mit den folgenden Materialien:

M 2 (Ab) Ableitungen von Exponentialfunktionen zuordnen

M 3c (Ab) Schritt 3: Die Entdeckung von e

M 5 (Ab) e -Funktion – Anwenden, vertiefen, vernetzen



SCHOOL-SCOUT.DE



Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Analysis: Die Entdeckung der eulerschen Zahl

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)

