

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Abstandsberechnungen im Raum

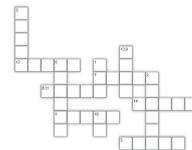
Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Abstandsberechnungen im Raum – Zahlen im Wortgitter

Ein Beitrag von Günther Weber



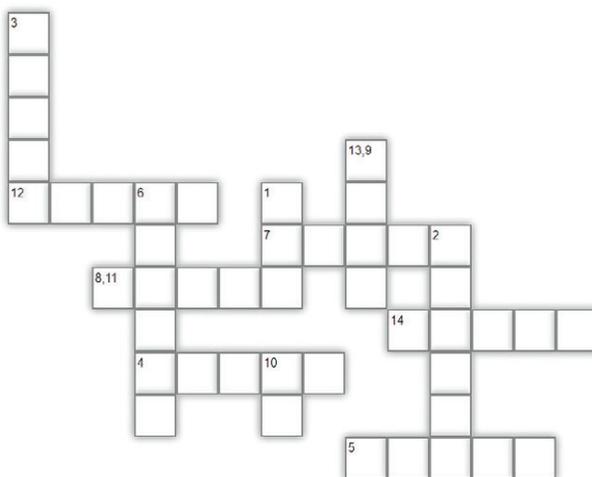
© Günther Weber

Der Abstand zweier geometrischer Objekte ist die Länge der kürzesten Verbindungsline zwischen den Objekten. Die kürzeste Verbindungsline verläuft entlang der Lotgeraden von einem Objekt zum anderen. Mit den Mitteln der analytischen Geometrie bestimmen die Schülerinnen und Schüler die Abstände zwischen Punkten, zwischen Punkt und Gerade bzw. Punkt und Ebene sowie zwischen parallelen bzw. windschiefen Geraden und parallelen Ebenen. Sie wenden die Abstandsberechnung dann z. B. bei der Berechnung von Geschwindigkeiten oder bei der Bestimmung von Volumina an. Ihre Ergebnisse kontrollieren die Jugendlichen mithilfe eines Kreuzworträtsels oder eines Wortgitters.

RAABE
LEARNING

Abstandsberechnungen im Raum – Zahlen im Wortgitter

Ein Beitrag von Günther Weber



© Günther Weber

Der Abstand zweier geometrischer Objekte ist die Länge der kürzesten Verbindungslinie zwischen den Objekten. Die kürzeste Verbindungslinie verläuft entlang der Lotgeraden von einem Objekt zum anderen. Mit den Mitteln der analytischen Geometrie bestimmen die Schülerinnen und Schüler die Abstände zwischen Punkten, zwischen Punkt und Gerade bzw. Punkt und Ebene sowie zwischen parallelen bzw. windschiefen Geraden und parallelen Ebenen. Sie wenden die Abstandsberechnung dann z. B. bei der Berechnung von Geschwindigkeiten oder bei der Bestimmung von Volumina an. Ihre Ergebnisse kontrollieren die Jugendlichen mithilfe eines Kreuzworträtsels oder eines Wortgitters.

Abstandsberechnungen im Raum – Zahlen im Wortgitter

Oberstufe (grundlegend)

Günther Weber

Hinweise	1
Informationen zur Abstandsberechnung	3
Aufgaben	6
Lösung	11

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem sicher anzuwenden. Die Lernenden untersuchen die Lagebeziehung von Geraden und Ebenen zueinander und bestimmen den Schnittpunkt zweier Geraden bzw. dreier Ebenen. Sie lösen Abstandsprobleme geometrischer Objekte mithilfe unterschiedlicher Methoden und berechnen den Flächeninhalt von Dreiecken sowie das Volumen von Pyramide und Kegel.

Die Aufgaben fördern eine Vielzahl der Kompetenzen, über die die Schülerinnen und Schüler in den Bereichen der Analytischen Geometrie vor dem Abitur verfügen sollten. Sie eignet sich daher auch gut zur Vorbereitung auf das Abitur

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab = Arbeitsblatt **Info** = Informationsblatt

Thema	Material	Methode
Informationen zur Abstandsberechnung	M1	AB, TA, KA
Abstandsberechnungen im Raum I	M2	Ab
Abstandsberechnungen im Raum II	M3	Ab

Kompetenzprofil:

Inhalt: Geradengleichung, Ebenengleichung, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen, Schnitt von Geraden bzw. Ebenen, Abstandsbestimmung zwischen geometrischen Objekten, Geradenspiegelung, Spurpunkte und Spurgerade, Volumen Pyramide und Kegel, (Extremwertproblem)

Medien: GTR/CAS bei einigen Aufgaben

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkte-Form bzw. Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung sowie die Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden bzw. dreier bereiten ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen wissen, welche Eigenschaften bei der Lagebeziehung von Punkt und Gerade, von Geraden und Ebene bzw. von Ebene zu Ebene erfüllt sein müssen. Die Beziehung zwischen Rechtwinkligkeit zweier Vektoren und dem Skalarprodukt dieser Vektoren ist bekannt. Sie können mit den Methoden der analytischen Geometrie Abstandsberechnungen (auch mit Parameter) durchführen sowie Flächeninhalte von Dreiecken und das Volumen von Pyramide oder Kegel bestimmen. Im günstigen Fall kennen Sie auch Spurpunkte und Spurgeraden.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 09.11.2022) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- untersuchen Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene bzw. zwischen zwei Ebenen,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebene.

Die Inhaltsfelder Analysis und analytische Geometrie sollen laut Kernlehrplan zudem nicht isoliert nebeneinander, sondern konzeptionell vernetzt z. B. durch übergreifende Konzepte wie den funktionalen Zusammenhang betrachtet werden. So kann die Bestimmung des Lotfußpunktes auf die Bestimmung des Minimums zurückgeführt werden.

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Die Arbeitsblätter M2 und M3 können Sie unabhängig voneinander einsetzen. Sie enthalten ähnliche Aufgabenstellungen und unterscheiden sich nur hinsichtlich der Kontrollmöglichkeit durch das Kreuzworträtsel oder das Wortgitter. Bei der Bearbeitung sollten die Lernenden einige Aufgaben mit den einzelnen Lösungsverfahren per Hand lösen, denn es handelt sich um Aufgaben, die auch im hilfsmittelfreien Teil des Abiturs vorkommen können. Auf keinem Fall sollten die Jugendlichen die Formel in einen GTR/CAS einprogrammieren und die Ergebnisse so bestimmen. Insbesondere bei der Bestimmung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden bietet es sich nach der Bearbeitung an, dass die Lernenden die Lösungsverfahren vergleichen. So kann z. B. der Abstand mithilfe des Minimums ohne Kenntnis des Skalarprodukts und ohne Bestimmung des Lotfußpunktes ermittelt werden.

Zur Kontrolle mithilfe des Kreuzworträtsels:

Die Ergebnisse können die Schülerinnen und Schüler nach jeder Aufgabe oder nach allen Aufgaben eintragen. Ergeben sich durch die Eingabe schon Ergebnisse anderer Aufgaben, so sind diese zu überprüfen.

Zur Arbeit mithilfe des Wortgitters:

Die ausgeschriebenen Zahlen im Wortgitter können zuerst in Paar-/Gruppenarbeit gesucht werden. Geschieht dies mithilfe der App „Abstandsberechnung im Raum I“

<https://raabe.click/LA-AbstandRaum1>

so wird nach der Markierung der ausgeschriebenen Zahl die Aufgabe angezeigt, zu der das Ergebnis gehört. Anschließend überprüfen die Jugendlichen das Ergebnis dann durch Rechnung. Ebenso kann auch zuerst eine

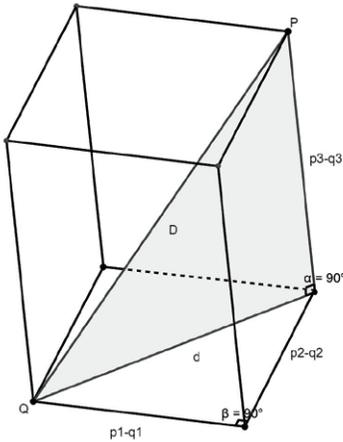
Rechnung erfolgen und anschließend das Ergebnis im Wortgitter gesucht und markiert werden.



Informationen zur Abstandsberechnung

M1

Abstand zweier Punkte



Gegeben sind die Punkte $P(p_1 | p_2 | p_3)$ und $Q(q_1 | q_2 | q_3)$. Der Abstand der Punkte P und Q kann aufgefasst werden als die Länge der Raumdiagonalen eines Quaders. Die Kanten des Quaders haben die Länge $|p_1 - q_1|$, $|p_2 - q_2|$ und $|p_3 - q_3|$ [LE].

Mit dem Satz des Pythagoras gilt nun

$$d^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 \text{ und}$$

$$D^2 = d^2 + (p_3 - q_3)^2$$

$$= (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2$$

bzw. da D eine Länge ist

$$D = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

© RAABE 2023

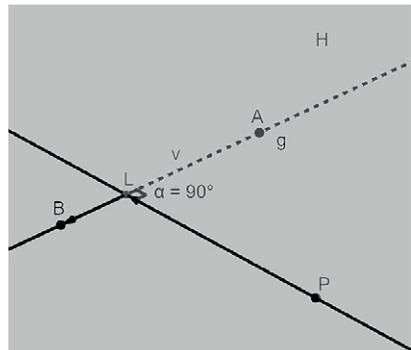
Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Der Abstand eines Punktes P zu einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{AB}$ bzw. $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ entspricht der Länge der Lotstrecke vom Punkt P zum Lotfußpunkt L, wobei L der Schnittpunkt des auf die Gerade gefällten Lotes mit der Geraden ist.

$$d(P; g) = d(P; L) = |\vec{PL}|$$

Hinweis zur Schreibweise: Der Ortsvektor eines Punktes wird im Beitrag mit seinem Kleinbuchstaben bezeichnet.

Beispiel: Punkt P hat den Ortsvektor \vec{p} .



Grafiken: Günther Weber

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Abstandsberechnungen im Raum

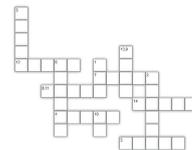
Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Abstandsberechnungen im Raum – Zahlen im Wortgitter

Ein Beitrag von Günther Weber



© Günther Weber

Der Abstand zweier geometrischer Objekte ist die Länge der kürzesten Verbindungsline zwischen den Objekten. Die kürzeste Verbindungsline verläuft entlang der Lotgeraden von einem Objekt zum anderen. Mit den Mitteln der analytischen Geometrie bestimmen die Schülerinnen und Schüler die Abstände zwischen Punkten, zwischen Punkt und Gerade bzw. Punkt und Ebene sowie zwischen parallelen bzw. windschiefen Geraden und parallelen Ebenen. Sie wenden die Abstandsberechnung dann z. B. bei der Berechnung von Geschwindigkeiten oder bei der Bestimmung von Volumina an. Ihre Ergebnisse kontrollieren die Jugendlichen mithilfe eines Kreuzworträtsels oder eines Wortgitters.

RAABE
LEHRMATERIALIEN