

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Analysis: Sinus- und Kosinusfunktion

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



II.A.43
Analysis
Sinus- und Kosinusfunktion –
Definition und Einfluss der Parameter

Ein Beitrag von Diana Heuser
Mit Beispielen von Jochen Lorenz

Die Sinus- bzw. Kosinusfunktion hat viele interessante Eigenschaften. Man kann sie im Bogenmaß und im Gradmaß darstellen. Sie hat zudem eine Periode und eine Amplitude. Man kann ihren Graphen – ähnlich zu geometrischen Funktionen – nach rechts oder links, nach oben oder unten verschieben, ihn strecken, stauchen und gipfeln.

Wichtig zu verstehen sind die Parameter und insbesondere die Folge mitgelesen, welche Einfluss die Parameter a , b , c und d auf die allgemeine Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ bzw. der all-gemeinen Kosinusfunktion haben.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 11/12
Quelle: © Günter Rothmann: Mathematik 11
Inhalt: Sinusfunktion, Kosinusfunktion, Periode, Amplitude, Bogenmaß, Gradmaß, Streuungsgang
Kompetenzen: mathematische Darstellungen verwenden (M1), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (M2), Geometrie darstellen

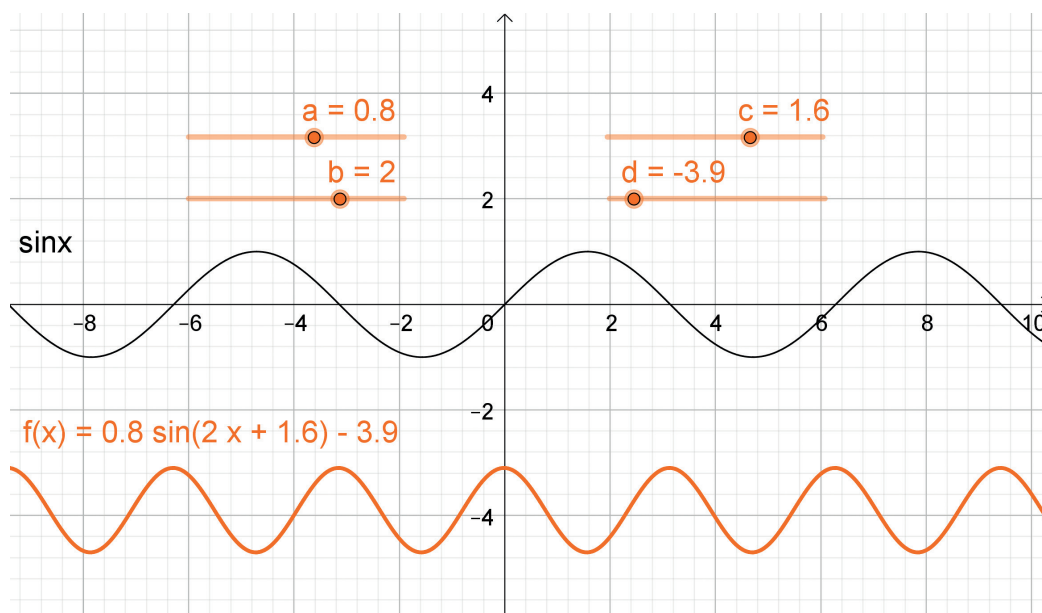
II.A.43

Analysis

Sinus- und Kosinusfunktion – Definition und Einfluss der Parameter

Ein Beitrag von Diana Hauser

Mit Illustrationen von Julia Lenzmann



© RAABE 2022

Die Sinus- bzw. Kosinusfunktion hat viele interessante Eigenschaften: Man kann sie im Bogenmaß und im Gradmaß darstellen. Sie hat zudem eine Periode und eine Amplitude. Man kann ihren Graphen – ähnlich zu ganzrationalen Funktionen – nach rechts oder links, nach oben oder unten verschieben, ihn strecken, stauchen und spiegeln.

Mithilfe von GeoGebra wird dynamisch und sukzessive der Frage nachgegangen, welchen Einfluss die Parameter a , b , c und d in der allgemeinen Sinusfunktion $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ (bzw. der allgemeinen Kosinusfunktion) haben.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11
Dauer:	6 Unterrichtsstunden (Minimalplan 3)
Inhalt:	Sinusfunktion, Kosinusfunktion, Periode, Amplitude, Bogenmaß, Gradmaß, Wertemenge
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Zusatzmaterialien:	GeoGebra-Dateien

Didaktisch-methodisches Konzept

Der Beitrag gliedert sich in zwei Teile:

In Teil 1 wird angenommen, dass die Lernenden die Sinusfunktion mithilfe des Einheitskreises gewonnen haben und der Graph in einem Koordinatensystem mit Gradeinteilung an der x-Achse gezeichnet wurde. Um reelle Zahlen an der x-Achse zu erhalten, wird zunächst das Bogenmaß eingeführt. Darüber hinaus werden die Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion (Amplitude, Periode, Wertemenge, ...) erläutert, um den Weg für die Einführung der allgemeinen Sinus- und Kosinusfunktion zu ebnet.

In Teil 2 werden schließlich die allgemeine Sinusfunktion $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ und die allgemeine Kosinusfunktion $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ eingeführt. Die Schülerinnen und Schüler sollen mithilfe von GeoGebra dynamisch und sukzessive den Einfluss jedes einzelnen Parameters auf die Graphen der Funktionen untersuchen.

Um was geht es inhaltlich?

Zunächst werden die Grundfunktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ betrachtet und ausreichend untersucht. Am Ende von Teil 1 soll allen Jugendlichen klar sein, was eine Amplitude und eine Periode ist und was es heißt, den Graphen der Sinus- bzw. Kosinusfunktion mithilfe des Bogenmaßes darzustellen. Wie ganzrationale Funktionen auch, können die Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion im Koordinatensystem verschoben, aber auch gestaucht, gestreckt und gespiegelt werden. Sobald ein Parameter Einfluss auf die Grundfunktion nimmt, fällt es vielen Schülerinnen und Schülern jedoch schwer, sich vorzustellen, was nun mit der Funktion „passiert“. Um die allgemeine Sinus- bzw. Kosinusfunktion zu verstehen, führt Teil 2 des Beitrags jeden Parameter einzeln ein. Die Erarbeitung wird dabei durch die beiden GeoGebra-Dateien Sinusfunktion.ggb und Kosinusfunktion.ggb visuell und dynamisch unterstützt.

Die GeoGebra-Dateien leisten dabei Folgendes:

- Jeder Parameter kann einzeln über Schieberegler gesteuert werden.
- Jeder Parameter kann ein- und ausgeblendet werden. Beispiel: Wird gerade der Parameter b (vgl. **M 5**) untersucht, so können die Parameter a , c und d in ihrer Grundeinstellung ($a = 1$, $c = 0$ und $d = 0$) einfach ausgeblendet werden.
- Die Grundfunktion ($\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$) kann stets eingeblendet bleiben. So ist gewährleistet, dass man die Veränderung der Funktion durch einen (oder mehrere) Parameter sofort sieht.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben in **M 11** „Zusammenführen der Parameter a , b , c und d “ sind alle Parameter in einer GeoGebra-Datei angelegt. So können auch mehrere Parameter gleichzeitig verändert werden.

Die GeoGebra-Dateien stehen Ihnen als Zusatzmaterial zum Download zur Verfügung.

Wie ist die Unterrichtseinheit aufgebaut?

Als **Einstieg** in die Thematik ist als Wiederholung das Übersichtsblatt „Hintergrundwissen: Sinus und Kosinus am Einheitskreis“ (**M 1**) vorgesehen.

Die **Erarbeitung** erfolgt in zwei Teilen:

- In Teil 1 (**M 2** bis **M 4**) wird das Bogenmaß eingeführt und auf die Eigenschaften der Sinus- bzw. Kosinusfunktion eingegangen.
- In Teil 2 (**M 5** bis **M 8**) werden die einzelnen Parameter der allgemeinen Sinus- und Kosinusfunktion eingeführt und ihr Einfluss auf den Graphen der Funktion sowie Amplitude, Periode und Wertemenge der Funktion untersucht.



Die **Ergebnissicherung** wird hier in Form des Merkblatts „Das müssen Sie zur Sinus- und Kosinusfunktion wissen!“ (**M 9**) sichergestellt. Diese kurze Theorieübersicht kann für die Bearbeitung der Materialien **M 10** und **M 11** entweder an die Wand projiziert werden oder als Vorlage für Sie als Tafelaufschrieb dienen. So haben die Lernenden die Auswirkungen der Parameter auf den Graphen der Funktion immer griffbereit.

Zur **Übung** eignet sich als Einstieg „Tandembogen: Ist die Aussage richtig oder falsch?“ (**M 10**). Hier werden Aussagen zum Einfluss immer eines Parameters abgefragt.

Ehe Sie Ihren Schülerinnen und Schülern das Arbeitsblatt „Zusammenführen der Parameter a, b, c und d“ (**M 11**) aushändigen, achten Sie bitte darauf, den darauf stehenden Kasten „Achtung!“ zu besprechen. Während in $f(x) = \sin(x + c)$ noch c die Verschiebung nach rechts/links angibt, gilt dies in $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ nicht mehr. Haben die Lernenden das Prinzip dahinter einmal verstanden, können sie die Aufgaben auf **M 11** bearbeiten, bei denen grundsätzlich mehrere Parameter gleichzeitig verändert wurden.

Der abschließende **Test** „Wissenstest – Wie fit sind Sie?“ (**M 12**) fragt kurz und bündig das erworbene Wissen ab.

Was muss bekannt sein?

Es wird vorausgesetzt, dass die Lernenden wissen, wie die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion über den Einheitskreis und das Abtragen von Punkten in ein Koordinatensystem gewonnen werden können. Am besten wiederholen Sie das Wissen kurz mithilfe von **M 1** „Hintergrundwissen: Sinus und Kosinus am Einheitskreis“ und klären gemeinsam auftretende Fragen.

Diese Kompetenzen trainieren die Lernenden

Die Lernenden

- argumentieren mathematisch (K 1), indem sie die Veränderung des Graphen den entsprechenden Werten eines Parameters zuweisen.
- verwenden mathematische Darstellungen (K 4), indem sie Graphen zeichnen.
- gehen mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik um (K 5), indem sie ihren Lösungsweg mit mathematischer Formelsprache notieren.

Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt; Mb: Merkblatt

Planung für 6 Stunden

Einstieg

M 1 (Ab) Hintergrundwissen: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Erarbeitung

Teil 1

M 2 (Ab) Problemstellung: Graphen vergleichbar machen

M 3 (Ab) Gradmaß und Bogenmaß

M 4 (Ab) Eigenschaften der Sinus- und der Kosinusfunktion

Teil 2

M 5 (Ab) Parameter b in $f(x) = \sin(bx)$ bzw. $f(x) = \cos(bx)$

M 6 (Ab) Parameter a in $f(x) = a\sin(x)$ bzw. $f(x) = a\cos(x)$

M 7 (Ab) Parameter d in $f(x) = \sin(x) + d$ bzw. $f(x) = \cos(x) + d$

M 8 (Ab) Parameter c in $f(x) = \sin(x + c)$ bzw. $f(x) = \cos(x + c)$

Ergebnissicherung

M 9 (Mb) Das müssen Sie zur Sinus- und Kosinusfunktion wissen!

Übungen

M 10 (Ab) Tandembogen: Ist die Aussage richtig oder falsch?

M 11 (Ab) Zusammenführen der Parameter a , b , c und d

Test

M 12 (Ab) Wissenstest – Wie fit sind Sie?

Lösung




Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 26.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für drei bis vier Stunden mit den folgenden Materialien:

M 3 (Ab)	Gradmaß und Bogenmaß
M 4 (Ab)	Eigenschaften der Sinus- und der Kosinusfunktion
M 5 (Ab)	Parameter b in $f(x) = \sin(bx)$ bzw. $f(x) = \cos(bx)$
M 6 (Ab)	Parameter a in $f(x) = a\sin(x)$ bzw. $f(x) = a\cos(x)$
M 7 (Ab)	Parameter d in $f(x) = \sin(x) + d$ bzw. $f(x) = \cos(x) + d$
M 8 (Ab)	Parameter c in $f(x) = \sin(x + c)$ bzw. $f(x) = \cos(x + c)$
M 11 (Ab)	Zusammenführen der Parameter a , b , c und d

Erklärung zu den Symbolen

	Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.
	einfaches Niveau
	mittleres Niveau
	schwieriges Niveau

M 1

Hintergrundwissen: Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Die Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion können über den Einheitskreis und das Abtragen von Punkten in ein Koordinatensystem gezeichnet werden. Die drei Kästen fassen die wesentlichen Erkenntnisse hierzu zusammen.

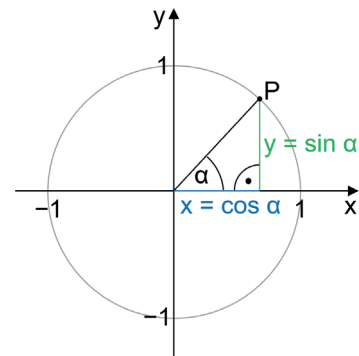
Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Der Sinus ordnet jedem Winkel α die y-Koordinate des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis zu.

Der Kosinus ordnet jedem Winkel α die x-Koordinate des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis zu.

Wichtige Beziehungen:

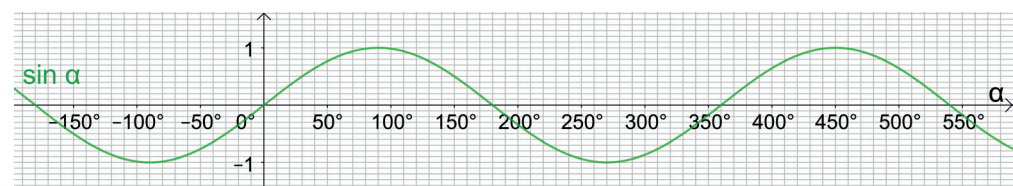
$$\begin{array}{ll} \sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha) & \cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha) \\ \sin(\alpha) = -\sin(360^\circ - \alpha) & \cos(\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha) \\ \sin(\alpha) = -\sin(180^\circ + \alpha) & \cos(\alpha) = -\cos(180^\circ + \alpha) \\ \sin(\alpha) = \sin(360^\circ + \alpha) & \cos(\alpha) = \cos(360^\circ + \alpha) \end{array}$$



Grafik: Diana Hauser

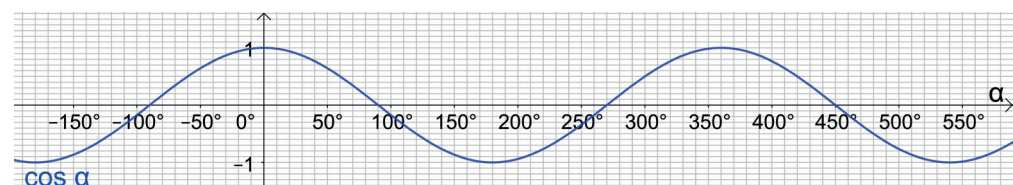
Sinusfunktion

Die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion, die ihren Verlauf alle 360° wiederholt. Die Funktionswerte nehmen nur Werte im Bereich $[-1;1]$ an.



Kosinusfunktion

Die Kosinusfunktion ist eine periodische Funktion. Sie ist die um 90° nach links verschobene Sinusfunktion.



Aufgabe

Wiederholen Sie kurz das Wissen rund um das Thema „Sinus und Kosinus am Einheitskreis“.

Leiten Sie die wichtigsten Beziehungen des ersten Kastens her, indem Sie beliebige Werte für α einsetzen und die Gleichheiten in der Grafik im zweiten bzw. dritten Kasten wiederfinden.

Klären Sie gemeinsam auftretende Fragen.

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Analysis: Sinus- und Kosinusfunktion

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



II.A.43
Analysis
**Sinus- und Kosinusfunktion –
Definition und Einfluss der Parameter**

Ein Beitrag von Diana Heuser
Mit Beispielen von Julia Lorenz

Der Sinus- bzw. Kosinusfunktion hat eine interessante Eigenschaft: Man kann sie im Bogenmaß und im Gradmaß darstellen. Sie hat zudem eine Periode und eine Amplitude. Man kann ihnen Geraden – ähnlich zu geometrischen Funktionen – nach rechts oder links, nach oben oder unten verschieben, sie strecken, stauchen und gipfeln.

Wichtig zu verstehen sind die Parameter und insbesondere die Folge mitgelesen, welche Einfluss die Parameter a, b, c und d auf die allgemeine Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ bzw. der all-gemeinen Kosinusfunktion haben.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 11/12
Quelle: © Günter Rothmann: Mathematik 11
Inhalt: Sinusfunktion, Kosinusfunktion, Periode, Amplitude, Bogenmaß, Gradmaß, Verschiebung
Kompetenzen: mathematische Darstellungen verwenden (M1), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (M2)
Zusatzverfähen: GeoGebra-Datien