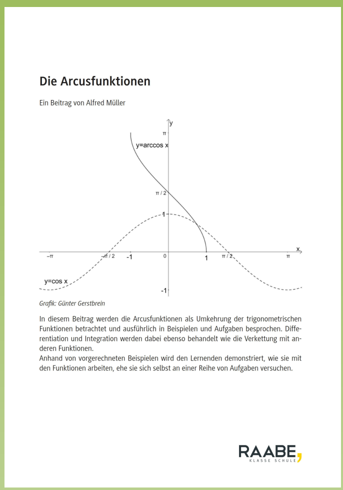
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Die Arcusfunktionen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Die Arcusfunktionen

Ein Beitrag von Alfred Müller

Grafik: Günter Gerstbrein

In diesem Beitrag werden die Arcusfunktionen als Umkehrung der trigonometrischen Funktionen betrachtet und ausführlich in Beispielen und Aufgaben besprochen. Differentiation und Integration werden dabei ebenso behandelt wie die Verkettung mit anderen Funktionen.
Anhand von vorgerechneten Beispielen wird den Lernenden demonstriert, wie sie mit den Funktionen arbeiten, ehe sie sich selbst an einer Reihe von Aufgaben versuchen.

RAABE KLASSE SCHULE

Die Arcusfunktionen

Oberstufe (weiterführend/vertiefend)

Ein Beitrag von Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

Nach einem Überblick über die trigonometrischen Funktionen werden die Arcusfunktionen als deren Umkehrungen vorgestellt. In allen Fällen werden auch die Ableitungen und Grundintegrale behandelt. Weiters demonstrieren einige bereits durchgerechnete Beispiele den Schülerinnen und Schülern, wie sie mit diesen Funktionen arbeiten können. In einer Reihe von Übungsaufgaben können die Jugendlichen schließlich ihr Wissen selbst erproben.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt **BA** Bildanalyse

● einfaches Niveau ■ mittleres Niveau ▲ schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Trigonometrische Funktionen	M1	AB, BA
Trigonometrische Funktionen – Ableitungen und Grundintegrale	M2	AB
Arcusfunktionen	M3	AB, BA
Arcusfunktionen – Ableitungen und Grundintegrale	M4	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Trigonometrische Funktionen, Winkelfunktion, Umkehrung, Arcusfunktion, Einheitskreis, Differentiation, Integration, Verkettung mit anderen Funktionen

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Differenzierung

Material	M1	M2	M3	M4
Niveau	●	■	▲	▲

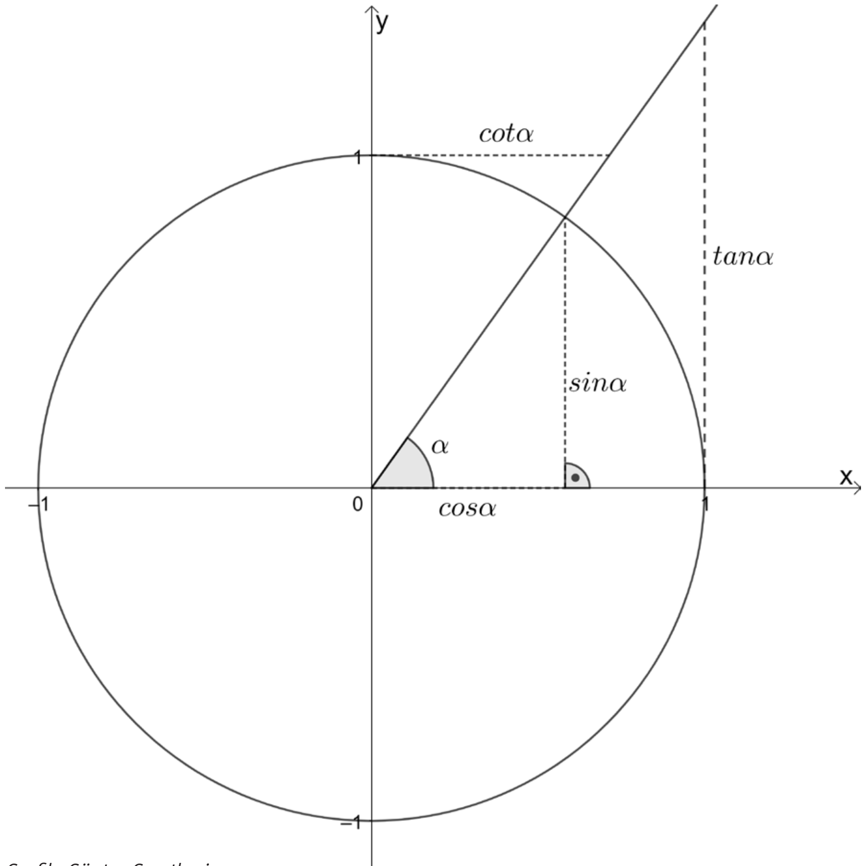
Die trigonometrischen Funktionen M1

Definition und Gesetzmäßigkeiten

Die Argumente der trigonometrischen Funktionen sind im Bogenmaß x gegeben.
Es gilt:

$$\frac{\varphi}{360°} = \frac{x}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\varphi}{180°} \cdot \pi$$

Üblicherweise werden die trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis dargestellt.

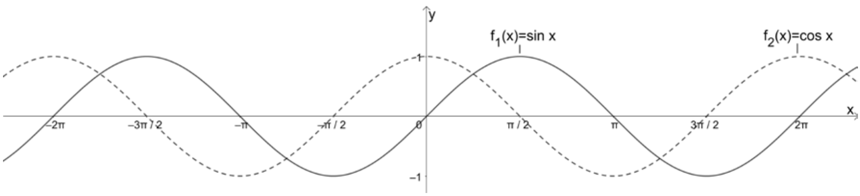


Grafik: Günter Gerstbrein

Sinus- und Kosinusfunktion:

$f_1(x) = \sin x$, $D_{f_1} = \mathbb{R}$, $W_{f_1} = [-1;1]$
$f_2(x) = \cos x$, $D_{f_2} = \mathbb{R}$, $W_{f_2} = [-1;1]$
Beide Funktionen besitzen die Periode 2π, d. h., es gilt:
$f_1(x + k \cdot 2\pi) = f_1(x), k \in \mathbb{Z}$
$f_2(x + k \cdot 2\pi) = f_2(x), k \in \mathbb{Z}$

Graphen von Sinus und Kosinusfunktion:



Grafik: Günter Gerstbrein

Aus den Graphen erkennt man:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Eigenschaften von Sinus- und Kosinusfunktion:

$f_1(x) = \sin x$	$f_2(x) = \cos x$
$f_1(x) = 0: \; x = k \cdot \pi \wedge k \in \mathbb{Z}$	$f_2(x) = 0: \; x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z}$
$f_1(-x) = -f_1(x)$	$f_2(-x) = f_2(x)$
Punktsymmetrie zum Ursprung	Achsensymmetrie zur y-Achse
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(x + 2n\pi) = \sin x$ für $n \in \mathbb{Z}$	$\cos(x + 2n\pi) = \cos x$ für $n \in \mathbb{Z}$
$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$	$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$	

Mithilfe der Additionstheoreme lässt sich jede Funktion f mit
$f(x) = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$ auf die Form $f(x) = a \cdot \sin(x+b)$ bringen.

Aus $A = a \cdot \cos b \wedge B = a \cdot \sin b$ erhält man:

$$\sqrt{A^2 + B^2} = a^2(\cos x)^2 + a^2(\sin x)^2 = a^2\left((\cos x)^2 + (\sin x)^2\right)$$

Wegen $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ folgt:

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}\ ;\ \cos b = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\ ;\ \sin b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Beispiel:

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos b = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sin b = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Tangens- und Kotangensfunktion

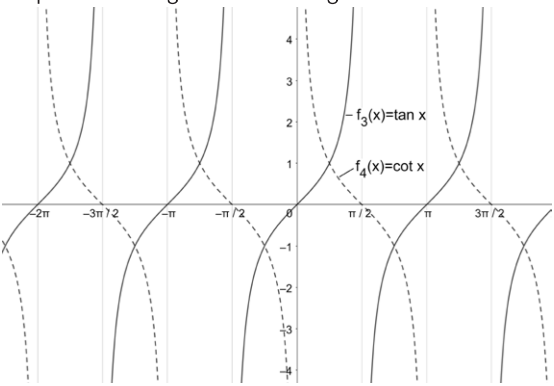
$$f_3(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x};\ D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \mid x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \right\},\ W_{f_3} = \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};\ D_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{ x \mid x = k \cdot \pi \wedge k \in \mathbb{Z} \},\ W_{f_4} = \mathbb{R}$$

Beide Funktionen besitzen die Periode π, d. h., es gilt:

$f_3(x + k \cdot \pi) = f_3(x) \wedge f_4(x + k \cdot \pi) = f_4(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$

Graphen von Tangens- und Kotangensfunktion:



Grafik: Günter Gerstbrein

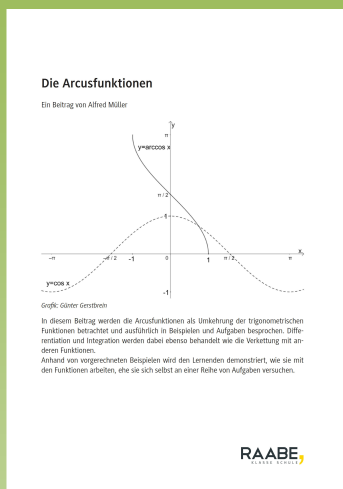
Aus den Graphen erkennt man:

$f_3(-x) = -f_3(x)$	$f_4(-x) = -f_4(x)$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$
Beide Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung	
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\cot(\pi - x) = -\cot x$
$\tan x = \frac{1}{\cot x}$	

Wegen des Zusammenhangs zwischen Tangens- und Kotangensfunktion genügt es, die Additionstheoreme für den Tangens anzugeben. Es gilt:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$



Die Arcusfunktionen

Ein Beitrag von Alfred Müller

Grafik: Günter Gerstbrein

In diesem Beitrag werden die Arcusfunktionen als Umkehrung der trigonometrischen Funktionen betrachtet und ausführlich in Beispielen und Aufgaben besprochen. Differentiation und Integration werden dabei ebenso behandelt wie die Verkettung mit anderen Funktionen.
Anhand von vorgerechneten Beispielen wird den Lernenden demonstriert, wie sie mit den Funktionen arbeiten, ehe sie sich selbst an einer Reihe von Aufgaben versuchen.

RAABE, KLASSE SCHULE