

SCHOOL-SCOUT.DE



Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Extremwertprobleme und Anwendungen bei einer Exponentialfunktion

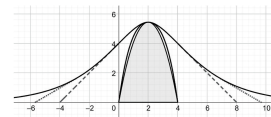
Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Extremwertprobleme und Anwendungen bei einer Exponentialfunktion

Günter Weber



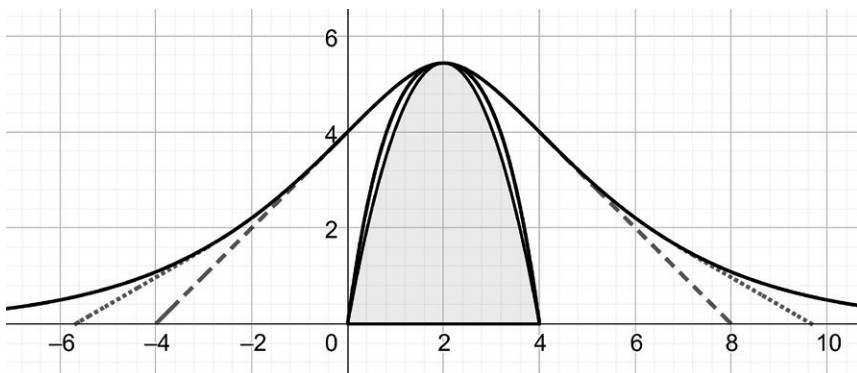
© Günter Weber

Funktionsuntersuchungen mit Eigenschaftsbestimmungen gehören zu den Standardaufgaben des Analysis-Kriteriums der Oberstufe. Nimmt man jedoch zum Graph einer Funktion noch z. B. den Graphen der Ableitungsfunktion oder den verschobenen bzw. gespiegelten Graphen der Funktion hinzu, so lassen sich stetigchen Dreiecke mit bestimmten Eigenschaften legen. Ebenso können Figuren zwischen die Graphen gelegt werden, sodass der Flächeninhalt maximal wird. Die Funktionsuntersuchung erweitert der Beitrag durch um Extremwertaufgaben. Der Graph einer Exponentialfunktion und der gespiegelte bzw. verschobene Graph der Funktion bilden bei weiteren Aufgaben den Querschnitt von Körpern. Anwendungsaufgaben stellen bestimmte Anforderungen an diese Körper, welche die Lernenden lösen.

RAABE

Extremwertprobleme und Anwendungen bei einer Exponentialfunktion

Günther Weber



© Günther Weber

Funktionsuntersuchungen mit Eigenschaftsbestimmungen gehören zu den Standardaufgaben des Analysis-Unterrichts der Oberstufe. Nimmt man jedoch zum Graph einer Funktion noch z. B. den Graphen der Ableitungsfunktion oder den verschobenen bzw. gespiegelten Graphen der Funktion hinzu, so lassen sich dazwischen Dreiecke mit bestimmten Eigenschaften legen. Ebenso können Figuren zwischen die Graphen gelegt werden, sodass der Flächeninhalt maximal wird. Die Funktionsuntersuchung erweitert der Beitrag damit um Extremalwertaufgaben. Der Graph einer Exponentialfunktion und der gespiegelte bzw. verschobene Graph der Funktion bilden bei weiteren Aufgaben den Querschnitt von Körpern. Anwendungsaufgaben stellen bestimmte Anforderungen an diese Körper, welche die Lernenden lösen.

Extremwertprobleme und Anwendungen bei einer Exponentialfunktion

Oberstufe (grundlegendes/weiterführendes Niveau)

Günther Weber

Hinweise	1
Aufgaben	3
Lösung	7

Die Schüler und Schülerinnen lernen:

durch Ableitung einer Exponentialfunktion oder Spiegelung bzw. Verschiebung ihres Graphen weitere Graphen zu bestimmen. Sie legen zwischen die Graphen ein Dreieck, welches abhängig von einer Parallelen zur y-Achse rechtwinklig oder gleichschenkelig sein kann. Ebenso legen die Jugendlichen durch eine Parallele ein Dreieck, ein Rechteck oder ein Trapez fest, dessen Flächeninhalt maximal sein soll. Sie bestimmen dazu jeweils die Parallelengleichung. Rotiert der Graph der verschobenen Exponentialfunktion, so entsteht ein Rotationskörper, an dem die Lernenden Volumenberechnungen durchführen. Spiegelt man den Graph der Exponentialfunktion mit eingeschränktem Definitionsbereich vertikal an einer Achse parallel zur y-Achse, so entsteht ein Querschnitt mit dem Aussehen eines Damms. Diesen Querschnitt nutzen die Schülerinnen und Schüler als Modellierung.






Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M 1	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	
	Dieses Symbol markiert Aufgaben, bei denen die Lernenden einen GTR/CAS für die Lösung nutzen sollen.	

© RAABE 2022

Kompetenzprofil:

Inhalt:	Exponentialfunktion, Null- und Schnittstellen, Hochpunkt, rechtwinkliges bzw. gleichschenkliges Dreieck, Bestimmen von Parametern bei Extremwertproblemen (Strecke, Dreieck, Rechteck, Trapez), uneigentliches Integral, Transformation von Graphen (Verschiebung, Geradenspiegelung), Volumen Rotationskörper, Bestimmen einer Parabelgleichung, Tangente und Berührungspunkt Prozentrechnung
Medien:	GTR/CAS, GeoGebra
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Ihre Schülerinnen und Schüler können eine Funktionsuntersuchung durchführen und uneigentliche Integrale berechnen. Sie kennen die Formeln zur Berechnung der Länge einer Strecke bzw. des Flächeninhalts von Dreieck, Rechteck oder Trapez und nutzen diese zum Aufstellen der Zielfunktion bei einem Extremwertproblem. Die Lernenden führen Transformationen (Verschiebung, Spiegelung) auf dem Graphen einer Funktion durch und ermitteln eigenständig den zugehörigen Funktionsterm. Sie kennen die Bedingung (Produkt der Steigungen der Geraden, auf denen zwei Seiten liegen, ist gleich -1 bzw. Umkehrung des Satzes des Pythagoras) wann ein Dreieck rechtwinklig bzw. gleichschenkelig ist und verwenden diese Bedingung zur Parameterbestimmung. Die Jugendlichen berechnen das Volumen von Rotationskörpern und bestimmen ohne Probleme Tangentengleichungen in einem Punkt des Graphen.

Im Allgemeinen sollten die Schülerinnen und Schüler sicher im Umgang mit Exponentialfunktionen sein und diese sowohl integrieren als auch differenzieren können. Von Vorteil ist es, wenn die Lernenden mit dem GTR/CAS-Rechner und GeoGebra geübt sind.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GoSt_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 10.01.2022) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrempunkten,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“),
- wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an,
- wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen an,

- bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge,
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mithilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Bei **Aufgabe 1c)** können leistungsstarke Schülerinnen und Schüler die Stammfunktion mithilfe partieller Integration / Produktintegration herleiten und anschließend mithilfe der Stammfunktion den Wert des Integrals berechnen. Ebenso können leistungsstarke Klassenmitglieder einige Exponentialgleichungen per Hand lösen. **Aufgabe 2a)** bietet die Möglichkeit, die Aufgabe auf verschiedene Gruppen zu verteilen: Jede Gruppe überprüft für einen Eckpunkt, ob an diesem Eckpunkt ein rechter Winkel vorliegen kann. Eine weitere Differenzierung bei dieser Aufgabe können Sie dahingehend erreichen, dass verschiedene Lösungswege zur Bearbeitung herangezogen werden. Die Gesamtaufgabe enthält einige Extremwertprobleme. Nachdem die Zielfunktion aufgestellt worden ist, kann die Lösung der einzelnen Aufgaben auf verschiedene Gruppen aufgeteilt werden. Die Lösung wird dann anschließend im Unterrichtsgespräch vorgestellt. Eine Differenzierung nach Schnelligkeit schaffen Sie dadurch, dass nur die schnelleren Jugendlichen überprüfen, ob ein Randextremum vorliegt. Bei leistungsschwächeren Lerngruppen sollten Sie die Lösung von **Aufgabe 3e)** auch mit dem GTR/CAS zulassen oder die Aufgabe in der Lerngruppe zusammen lösen lassen. Vor der Bearbeitung der **Aufgabenteile 5e)** und **f)** wiederholen Sie den Begriff knickfrei, oder falls er den Schülerinnen und Schülern bisher unbekannt ist, im Unterrichtsgespräch evtl. mit Skizzen an der Tafel klären, was knickfrei bedeutet (An den „Nahtstellen“ haben die Teilfunktionen gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung). Eine Veranschaulichung bzw. Kontrolle der Lösungen kann mithilfe von GeoGebra geschehen. Die Aufgaben beinhalten eine Vielzahl von Aufgabenstellungen, wie sie auch im Abitur vorkommen können. Sie eignen sich daher zur Vorbereitung auf das Abitur sehr gut.

Aufgaben

M1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-0,5x+2}$

1.

- Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f' .
- Ermitteln Sie den Schnittpunkt S des Graphen der Funktion f mit dem Graphen der Ableitungsfunktion f' .
- Die Graphen der Funktionen f und f' sowie die Gerade mit der Gleichung $x=k$, $k > \frac{2}{3}$ schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt $A(k)$ dieser Fläche und bestimmen Sie anschließend $\lim_{k \rightarrow \infty} A(k)$.
- Die Graphen der Funktionen f und f' schneiden aus der Geraden mit der Gleichung $x=k$, $k > \frac{2}{3}$ eine Strecke aus. Bestimmen Sie k so, dass die Länge der Strecke maximal wird.



- Die Gerade mit der Gleichung $x=k$, $k > \frac{2}{3}$ schneidet die Graphen der Funktionen f bzw. f' jeweils in einem Punkt. Diese Schnittpunkte bilden zusammen mit dem Schnittpunkt S ein Dreieck.
 - Bestimmen Sie k so, dass das Dreieck rechtwinklig wird.
 - Untersuchen Sie, ob es ein k gibt, so dass das Dreieck gleichschenkelig wird. Falls es ein solches k gibt, geben Sie die Schenkellänge an.
 - Bestimmen Sie k so, dass das Dreieck maximalen Flächeninhalt hat.



- Der Graph der Funktion f wird an der x -Achse gespiegelt, die zugehörige Funktion lautet f_5 .
 - Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f_5 .
 - Zeigen Sie, dass $F(x) = (-2x - 4) \cdot e^{-0,5x+2}$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.
 - Die Gerade mit der Gleichung $x=k$, $k > 0$ schneidet die Graphen der Funktionen f bzw. f_5 jeweils in einem Punkt. Diese Schnittpunkte bilden zusammen mit dem Ursprung O ein Dreieck. Bestimmen Sie k so, dass das Dreieck maximalen Flächeninhalt hat. Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts des Dreiecks am Flächeninhalt der gesamten Fläche zwischen den Graphen.



SCHOOL-SCOUT.DE



Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Extremwertprobleme und Anwendungen bei einer Exponentialfunktion

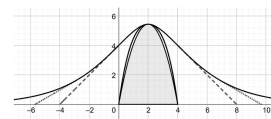
Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Extremwertprobleme und Anwendungen bei einer Exponentialfunktion

Günter Weber



© Günter Weber

Funktionsuntersuchungen mit Eigenschaftsbestimmungen gehören zu den Standardaufgaben des Analysis-Kriteriums der Oberstufe. Nimmt man jedoch zum Graph einer Funktion noch z. B. den Graphen der Ableitungsfunktion oder den verschobenen bzw. gespiegelten Graphen der Funktion hinzu, so lassen sich stetischen Dreiecke mit bestimmten Eigenschaften legen. Ebenso können Figuren zwischen die Graphen gelegt werden, sodass der Flächeninhalt maximal wird. Die Funktionsuntersuchung erweitert der Beitrag durch um Extremwertaufgaben. Der Graph einer Exponentialfunktion und der gespiegelte bzw. verschobene Graph der Funktion bilden bei weiteren Aufgaben den Querschnitt von Körpern. Anwendungsaufgaben stellen bestimmte Anforderungen an diese Körper, welche die Lernenden lösen.

RAABE