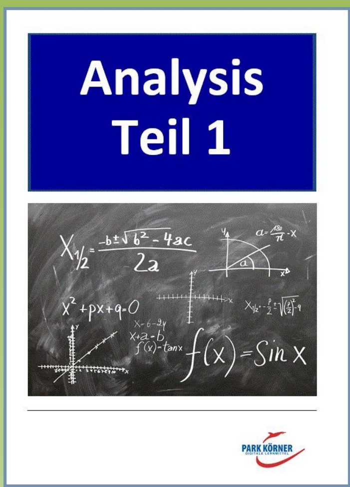
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Analysis, Teil 1 - mit Videos und Audios

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



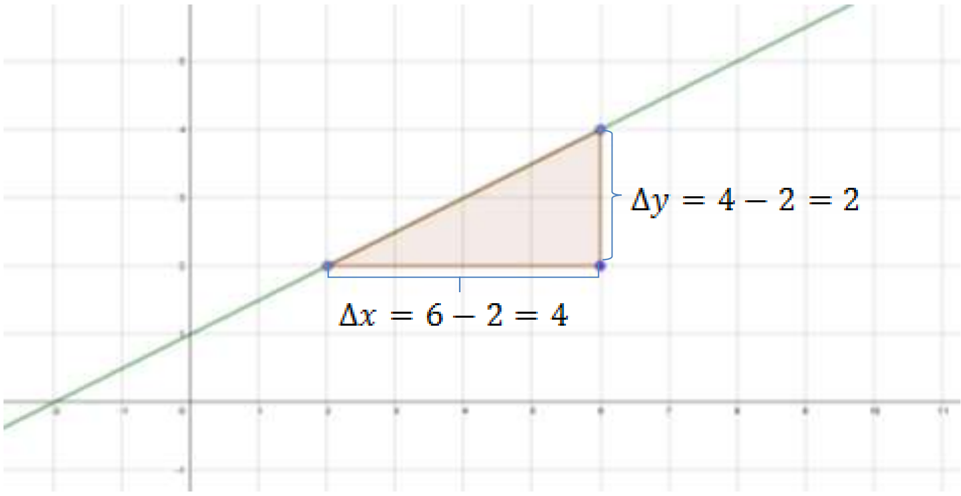
Inhaltsverzeichnis

1. Lokales Differenzieren

1.1 Die mittlere Änderungsrate

Bereits in der 8. Klasse haben wir uns mit dem Begriff der Steigung einer Geraden auseinandergesetzt. Dazu betrachteten wir das sog. Steigungsdreieck einer Geraden.

Beispiel:



Die Steigung der Geraden beträgt $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Die Steigung bedeutet dabei, dass der y-Wert pro Einheit um $\frac{1}{2}$ zunimmt. Anders ausgedrückt: Egal ob wir das Intervall $[1; 2]$, $[5; 6]$ oder jedes beliebige andere Intervall der Länge 1 betrachten, die Änderung des y-Werts beträgt stets $\frac{1}{2}$.

In diesem Abschnitt betrachten wir nun die Steigung eines beliebigen Funktionsgraphen, also nicht notwendigerweise einer Geraden, in einem beliebigen Intervall.

Der Quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

heißt **mittlere Änderungsrate** oder **Differenzenquotient** der Funktion f im Intervall [a;b].

Beispiel 1

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ im Intervall $[2; 5]$.

Lösung:

Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[2; 5]$ beträgt $\frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 5^2 - 2\cdot 5 + 3 - \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 3\right)}{3} = \frac{3}{2}$

Beispiel 2 (Auszug Abitur 2017, Bayern, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1)

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

https://pixabay.com/de/pflanze-pollen-pollination-blume-692141/ (cc0, 08.12.2018)

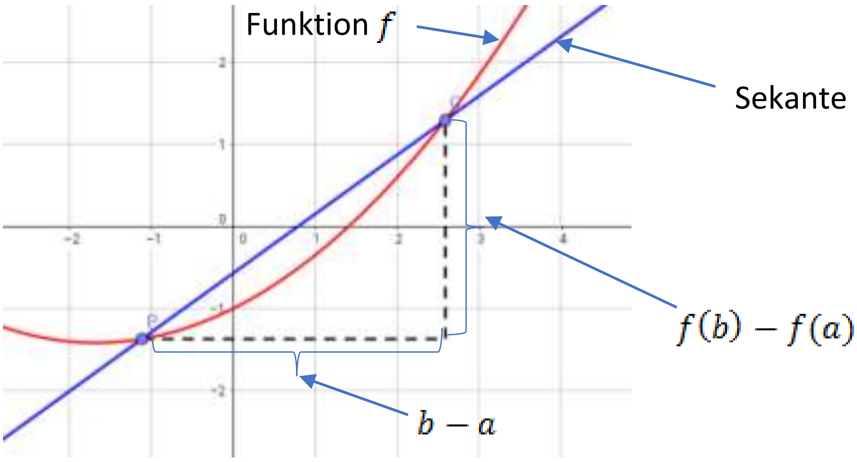
Lösung:

Die mittlere Änderungsrate in den ersten beiden Stunden der Messung beträgt

$$\frac{n(2) - n(0)}{2 - 0} = \frac{3 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 + 500 - (3 \cdot 0^2 - 60 \cdot 0 + 500)}{2} = -54$$

Das heißt während der ersten beiden Stunden nach Beginn der Messung nimmt die Anzahl durchschnittlich um 54 Pollen pro Stunde ab.

Der Differenzenquotient beschreibt die **Steigung der Sekante** durch die Punkte $P\big(a\big|f(a)\big)$ und $Q(b|f(b))$.



Beispiel 3

Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto x^3 - 4x$. Bestimmen Sie die Sekante s durch die Punkte $P(2|f(2))$ und $Q(3|f(3))$. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einem Funktionsplotter.

Lösung:

$f(2) = 0 \qquad \Rightarrow P(2|0)$

$f(3) = 15 \qquad \Rightarrow Q(3|15)$

$s(x) = mx + t$

$$m = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{15 - 0}{1} = 15$$

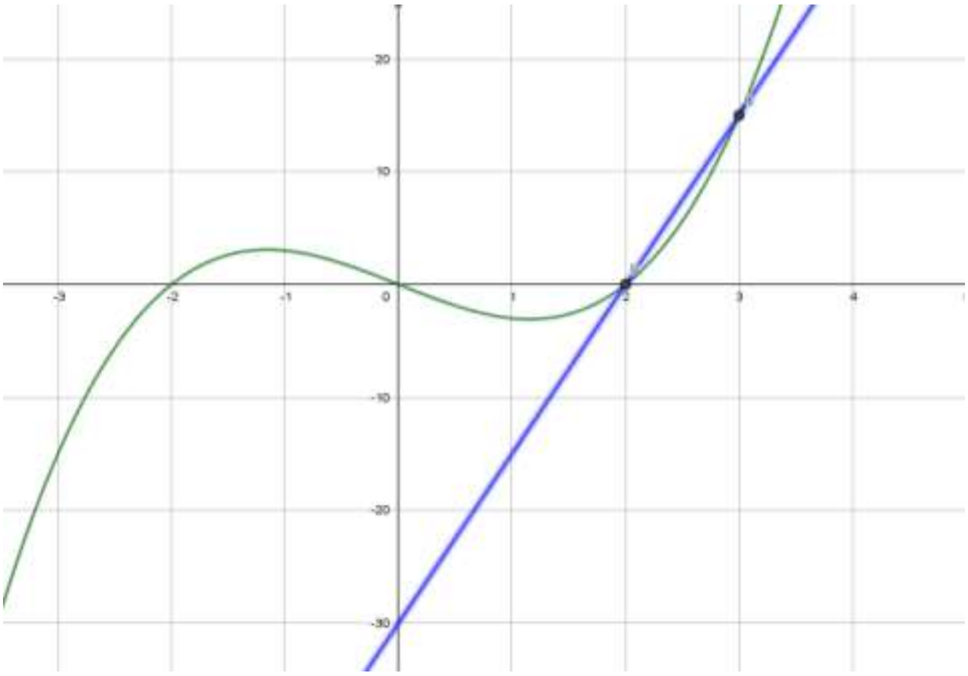
$s(x) = 15x + t$

Punkt $P(2|0)$ einsetzen:

$0 = 15 \cdot 2 + t$

$t = -30$

$s(x) = 15x - 30$



1.1 Die mittlere Änderungsrate

Aufgabe 1

https://pixabay.com/de/architektur-blau-backstein-br%C3%BCcke-3803885/ (cc0, 08.12.2018)

Ein Stein fällt von einer hohen Brücke in einen Fluss. Es dauert 2,8 Sekunden bis der Stein die Wasseroberfläche berührt. Die zurückgelegte Strecke des Steins (Einheit: Meter) lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit mit der Formel

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

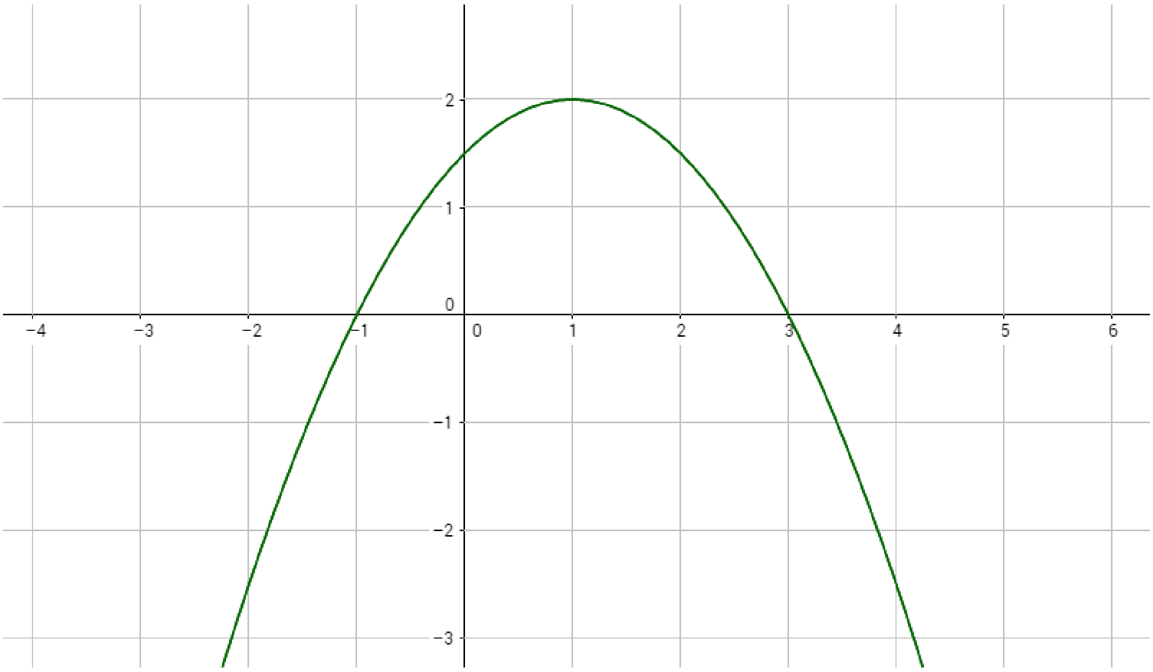
berechnen, wobei $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$ und t für die Zeit in Sekunden steht.

a) Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit des Steins während des freien Falls.

b) Wie lautet die durchschnittliche Geschwindigkeit des Steins in den Zeitintervallen $[0; 1]$, $[0{,}5; 1{,}5]$, $[1; 2]$ und $[1{,}5; 2{,}5]$?

Aufgabe 2

Folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



a) Bestimmen Sie den Differenzenquotienten im Intervall $[1;3]$ geometrisch.

b) Geben Sie ein Intervall an, in dem der Differenzenquotient positiv ist.

c) Geben Sie ein Intervall an, in dem der Differenzenquotient 0 ist.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen die maximale Definitionsmenge und den Differenzenquotienten im Intervall $[2;3]$. Skizzieren Sie jeweils den Funktionsgraphen und die zugehörige Sekante des Intervalls $[2;3]$.

a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $g(x) = \frac{1}{x}$

c) $h(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

1.1 Die mittlere Änderungsrate

Aufgabe 1

a) $\frac{s(2{,}8)-s(0)}{2{,}8-0} \approx \frac{38{,}45}{2{,}8} \approx 13{,}73$

Die durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt $v = 13{,}73\ \frac{m}{s}$.

b) Durchschnittliche Geschwindigkeit im Intervall $[0; 1]$: $\frac{s(1)-s(0)}{1-0} = \frac{\frac{1}{2}\cdot g\cdot 1^2-\frac{1}{2}\cdot g\cdot 0^2}{1} = \frac{1}{2}g \approx 4{,}91\ \frac{m}{s}$

Durchschnittliche Geschwindigkeit im Intervall $[0{,}5; 1{,}5]$: $\frac{s(1{,}5)-s(0{,}5)}{1{,}5-0{,}5} \approx 9{,}81\ \frac{m}{s}$

Durchschnittliche Geschwindigkeit im Intervall $[1; 2]$: $\frac{s(2)-s(1)}{2-1} \approx 14{,}71\frac{m}{s}$

Durchschnittliche Geschwindigkeit im Intervall $[1{,}5; 2{,}5]$: $\frac{s(2{,}5)-s(1{,}5)}{2{,}5-1{,}5} \approx 19{,}62\frac{m}{s}$

Aufgabe 2

a) -1

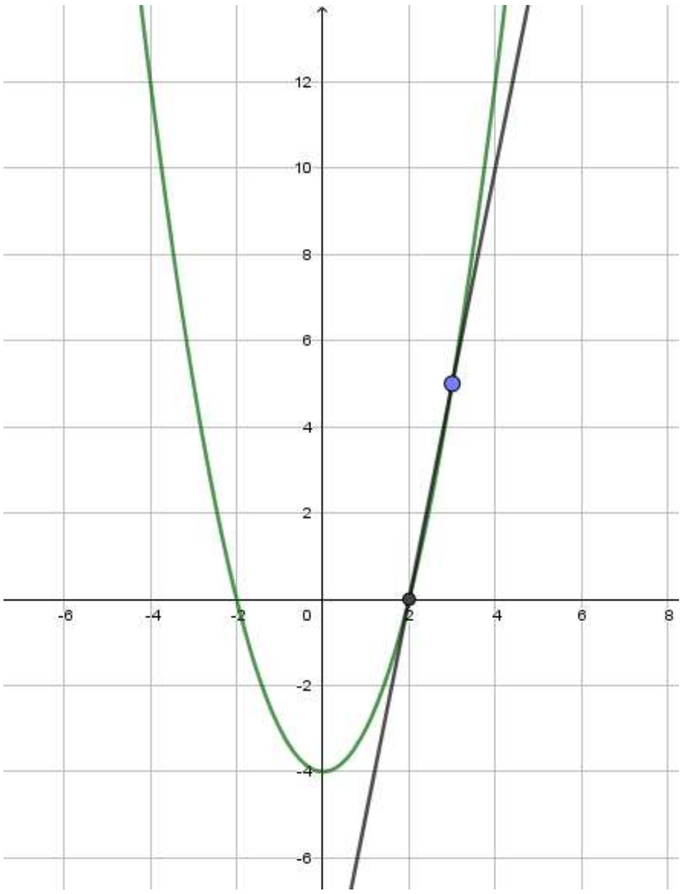
b) z. B. [0;1] oder [-1;1]

c) z. B. [0;2] oder [-2;4]

Aufgabe 3

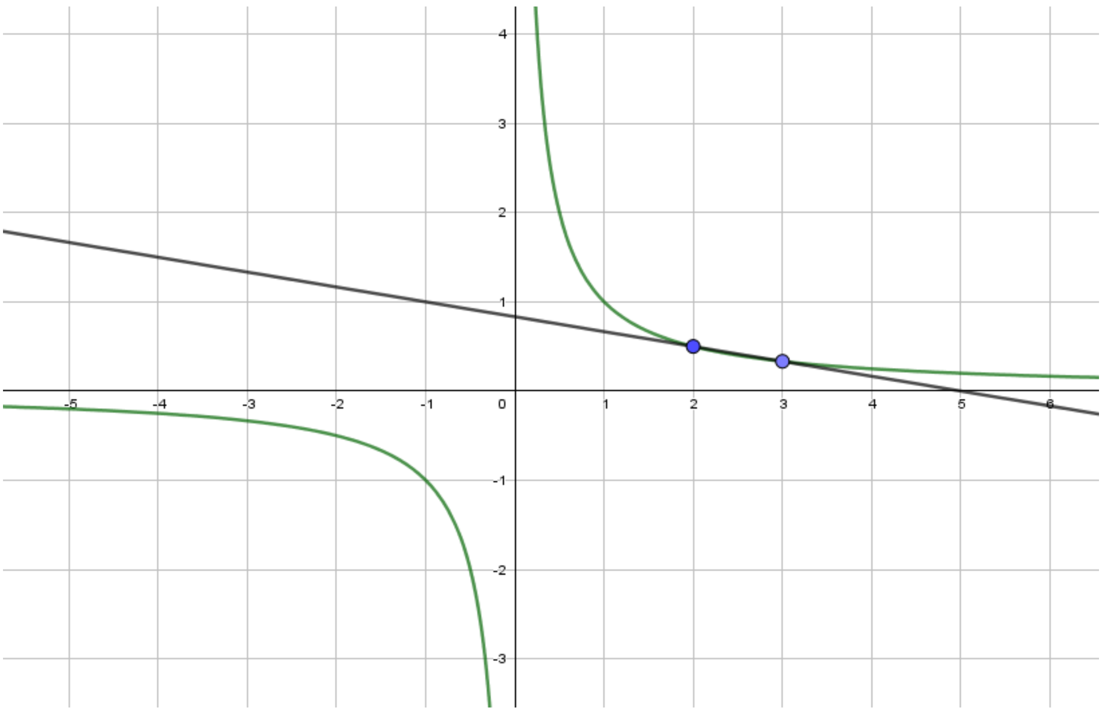
a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Differenzenquotient: $\frac{3^2-4-(2^2-4)}{3-2} = 5$



b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Differenzenquotient: $\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{3-2} = -\frac{1}{6}$



Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Analysis, Teil 1 - mit Videos und Audios

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de