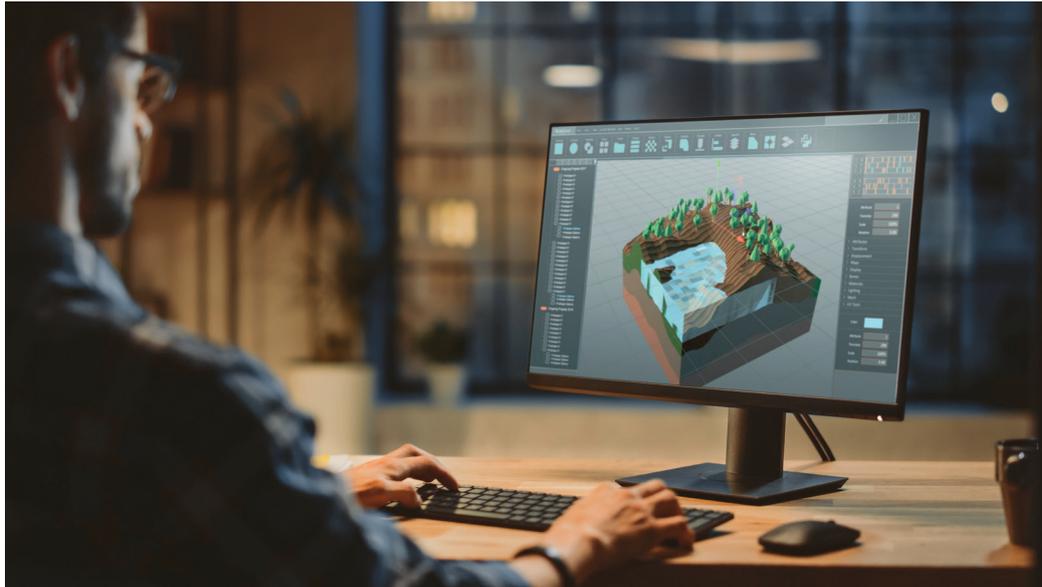


II.B.26

Lineare Algebra und analytische Geometrie

Spiegelung von Geraden – Entwicklung von Computerspielen mit linearer Algebra

Ein Beitrag von Johann-Georg Vogelhuber



© gorodenkoffi/Stock/Getty Images Plus

Die Entwicklung von modernen Computerspielen ist ohne fortgeschrittene Konzepte der linearen Algebra undenkbar. Ausgehend von unterschiedlichen Anforderungssituationen im Bereich der Spieleentwicklung erarbeitet Ihre Klasse die Spiegelung einer Geraden an einer Ebene. Das Material bietet so einen motivierenden Anwendungsbezug für die Lernenden. Überdies bieten verlinkte Erklärvideos und ausgearbeitete *LearningSnacks* Hilfen und Tipps und unterstützen Sie dadurch beim differenzierten Unterrichten.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	Sek II
Dauer:	6-7 Unterrichtsstunden (Minimalplan 2)
Inhalt:	Parameterdarstellung von Ebenen, Schnittpunktberechnung von Gerade und Ebene, Abstandsberechnung Punkt und Ebene
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3)
Zusatzmaterialien:	Einstiegsvideo

LEARNING
Snacks

Didaktisch-methodisches Konzept

In dieser Unterrichtseinheit erarbeitet Ihre Klasse die notwendigen Konzepte zur Spiegelung einer Geraden an einer Ebene im \mathbb{R}^3 . Dazu werden in unterschiedlichen realitätsbezogenen Anforderungssituationen zunächst die Konzepte der Lotgeraden und der Spiegelung eines Punktes erarbeitet, um anschließend die Spiegelung einer Geraden herleiten zu können.

Um was geht es inhaltlich?

Die Spiegelung einer Geraden an einer Ebene im \mathbb{R}^3 erfordert das Verständnis der fundamentalen Idee der Lotgeraden zu einer Ebene durch einen gegebenen Punkt. Dieses Konzept ermöglicht Abstandsberechnung oder Spiegelungsberechnungen.

Grundlegend für die Computergrafik ist die Berechnung der Lichtausbreitung in einer Szene. Dazu werden häufig komplexe Spiegelungsberechnungen benötigt. Aus Gründen der didaktischen Reduktion wird in der zentralen Unterrichtsstunde die Ausbreitung bzw. Spiegelung eines Laserstrahls berechnet.

Um das Verfahren zur Berechnung der Spiegelung einer Geraden Schritt für Schritt zu erarbeiten, wird zunächst die Lagebeziehung von Gerade und Ebene wiederholt, um darauf aufbauend den Abstand eines Punktes zu einer Ebene zu berechnen. Dieses Verfahren enthält bereits die wichtigsten Schritte, um einen Punkt an einer Ebene spiegeln zu können.

Die Spiegelung einer Geraden kann so auf das dann bekannte Verfahren zur Spiegelung eines Punktes zurückgeführt werden.

Wie ist die Unterrichtseinheit aufgebaut?

Die Unterrichtseinheit besteht aus vier in sich abgeschlossenen Anforderungssituationen. In jeder Anforderungssituation wird dabei auf das Rechenverfahren, das in der vorhergegangenen Situation erarbeitet wurde, zurückgegriffen und entsprechend erweitert.

Bis auf das Arbeitsblatt „Spiegelung eines Punktes an der Ebene“ (**M 6**) sind die Situationen für eine problemorientierte Erarbeitung des Verfahrens konzipiert.

Jede dieser Unterrichtsstunden kann entsprechend der vollständigen Handlung strukturiert werden.

Der **Einstieg** in eine Stunde erfolgt mit der entsprechenden Situationsbeschreibung: „Ziel erfasst? – Lagebeziehung von Gerade und Ebene“ (**M 1**), „Alle Systeme korrekt? – Abstand von Punkt und Ebene“ (**M 3**) und „Eine Laserkanone für „Alpha Chase“ – Spiegelung von Geraden“ (**M 7**). Für den Einstieg in die zentrale Stunde zur Berechnung der Spiegelung einer Geraden (**M 7**) kann das zugehörige Einstiegsvideo verwendet werden, das sich als Zusatzmaterial auf der CD befindet.



CD 84

Eine **Planungsphase** schließt sich ausgehend von diesen Einstiegssituationen jeweils mithilfe der vorbereiteten Analysefragen an. Diese Analysefragen sollen die Lernenden zu einer systematischen Betrachtung der Situation anleiten und zur gemeinsamen Erarbeitung eines Handlungsplans führen. Dieser Handlungsplan sollte an zentraler Stelle im Klassenraum notiert werden, sodass die Lernenden während der Erarbeitungsphase darauf zurückgreifen können.



Zur Unterstützung der **Erarbeitung** werden die Situationen um entsprechendes Hilfematerial ergänzt. Dabei dient das Arbeitsblatt „Hilfematerial: Ebenengleichung aufstellen und Schnittpunkt berechnen“ (**M 2**) als Hilfe für **M 1**. Die vorstrukturierten Arbeitsbögen „Hilfematerial: Abstand von Punkt und Ebene“ (**M 4**, **M 5**) sind dabei als Hilfestellung für **M 3** gedacht. **M 5** gibt dabei den Rahmen noch stärker vor als **M 4**. Entsprechend für **M 7** sind die vorstrukturierten Arbeits-

bögen „Hilfematerial: Eine Laserkanone für „Alpha Chase““ (M 8, M 9) vorgesehen. Die jeweils differenzierten Hilfestellungen mit vorbereiteten Rechenschritten sorgen dafür, dass auch leistungsschwächere Lernende diese Aufgaben lösen können. Bei der Erstellung des Handlungsplans ist daher darauf zu achten, dass Handlungsplan und Hilfematerial identische Rechenschritte aufweisen. Neben den vorstrukturierten Arbeitsbögen wird das Hilfematerial um verlinkte Erklärvideos und *LearningSnacks* ergänzt. Diese *LearningSnacks* ermöglichen eine interaktive Kontrolle der Lösung durch die Lernenden. Die Lösungen der Lernenden sollen dabei entsprechend der Aufgabenstellung in einer übersichtlichen und präsentierfähigen Form aufbereitet werden. Auf eine strukturierte Formulierung der Lösungen sollte dabei entsprechend Wert gelegt werden.

Die **Ergebnissicherung** erfolgt idealerweise durch Präsentation von verschiedenen Lösungen aus der Lerngruppe. Zur Sicherung und Systematisierung des neu erarbeiteten Rechenverfahrens kann am Ende einer jeden Stunde der Wissensspeicher „Wissensspeicher: Vektorrechnung im \mathbb{R}^3 “ (M 10) um das neue Verfahren ergänzt werden. Dies kann auch als Hausaufgabe durchgeführt werden, so dass der Einstieg in die Folgestunde mit der Besprechung der neuen Einträge erfolgen kann. Auf diese Weise werden die Lerninhalte der einzelnen Stunden miteinander vernetzt.

Zur **Übung** kann nach der Erarbeitung der Spiegelung einer Geraden das Arbeitsblatt „Übungsaufgabe zur Wiederholung und Vertiefung“ (M 11) verwendet werden. Diese Aufgabe bereitet auch auf die schriftliche Übung „Vektorrechnung im \mathbb{R}^3 “ (M 12) vor, die zur **Lernerfolgskontrolle** verwendet werden kann.

Was muss bekannt sein?

Die Lernenden müssen mit dem Vektorbegriff vertraut sein und sicher mit Geraden- und Ebenendarstellungen in Parameterform umgehen können. Dabei ist wichtig, dass sie in diesem Kontext über eine inhaltliche Vorstellung der Begriffe Stützvektor und Richtungsvektor verfügen. Zusätzlich muss das Vektorprodukt zur Berechnung von orthogonalen Vektoren angewendet werden können.

Für die Bearbeitung der Aufgabenstellungen in dieser Reihe ist es hilfreich, wenn die Lernenden in der Lage sind, lineare Gleichungssysteme zur Beurteilung der Lagebeziehung zweier Geraden im Raum einzusetzen. Dabei setzen sie zur Lösung dieser Gleichungssysteme entweder einen GTR oder ein CAS ein.



Diese Kompetenzen trainieren die Lernenden

Die Lernenden

- lösen Probleme mathematisch (K 2), indem sie mithilfe von Vektoren und linearen Gleichungssystemen die Frage zu einer gegebenen Sachsituation beantworten.
- modellieren mathematisch (K 3), indem sie Anwendungssituationen mithilfe von Vektorgleichungen beschreiben.

Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt

Planung für 6-7 Stunden

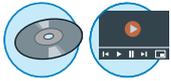
Einstieg/Erarbeitung

Thema: Grundkonzept der Lotgeraden

- | | | |
|------------|------|--|
| M 1 | (Ab) | Ziel erfasst? – Lagebeziehung von Gerade und Ebene |
| M 2 | (Ab) | Hilfematerial: Ebenengleichung aufstellen und Schnittpunkt berechnen |
| M 3 | (Ab) | Alle Systeme korrekt? – Abstand von Punkt und Ebene |
| M 4 | (Ab) | Hilfematerial: Abstand von Punkt und Ebene |
| M 5 | (Ab) | Hilfematerial: Abstand von Punkt und Ebene |

Thema: Spiegelung von Punkt und Gerade

- | | | |
|------------|------|---|
| M 6 | (Ab) | Spiegelung eines Punktes an einer Ebene |
| M 7 | (Ab) | Eine Laserkanone für „Alpha Chase“ – Spiegelung von Geraden |
| M 8 | (Ab) | Hilfematerial: Eine Laserkanone für „Alpha Chase“ |
| M 9 | (Ab) | Hilfematerial: Eine Laserkanone für „Alpha Chase“ |



CD 84

Ergebnissicherung

Thema: Vektorrechnung im \mathbb{R}^3

- | | | |
|-------------|------|---|
| M 10 | (Ab) | Wissensspeicher: Vektorrechnung im \mathbb{R}^3 |
|-------------|------|---|

Übung und Lernerfolgskontrolle

Thema: Vektorrechnung im \mathbb{R}^3

- | | | |
|-------------|------|---|
| M 11 | (Ab) | Übungsaufgabe zur Wiederholung und Vertiefung |
| M 12 | (Ab) | Vektorrechnung im \mathbb{R}^3 |

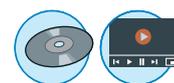
Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 20.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für zwei Stunden mit den folgenden Materialien:

- M 6** (Ab) Spiegelung eines Punktes an einer Ebene
- M 7** (Ab) Eine Laserkanone für „Alpha Chase“ – Spiegelung von Geraden
- M 8** (Ab) Hilfematerial: Eine Laserkanone für „Alpha Chase“
- M 9** (Ab) Hilfematerial: Eine Laserkanone für „Alpha Chase“



CD 84

Erklärung zu den Symbolen

	Tauchen diese Symbole auf, sind die Materialien differenziert. Es gibt drei Niveaustufen, wobei nicht jede Niveaustufe extra ausgewiesen wird.		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau	

	Dieses Symbol markiert Wichtiges und Merksätze.
	Dieses Symbol markiert Tipps.
	Dieses Symbol markiert Aufgaben, bei denen Videos angesehen werden.
	Dieses Symbol markiert Aufgaben, bei denen die Lernenden einen Taschenrechner für die Lösung nutzen sollen.
	Dieses Symbol markiert Zusatzmaterialien, die sich auf der mitgelieferten CD befinden.

