

# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Ein anwendungsorientierter Einstieg in die Stochastik*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)



### Ein anwendungsorientierter Einstieg in die Stochastik – der Farbkreislauf

Ralf Schütz, Bielefeld  
Illustrationen von Ralf Schütz



Foto: image Source/DigitalVision/Getty Images Plus

Mit dieser Unterrichtsstunde steigen Sie anwendungsorientiert in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastik ein. Ihre Schüler basieren zunächst einen Farbkreislauf, führen eine Reihe von Experimenten aus, die sie auswerten müssen, und erstellen dazu Balkendiagramme. Anhand dieser Ergebnisse können Sie den Zufallsbegriff gut veranschaulichen. Im Verlauf der Einheit führen Sie Häufigkeiten und die Laplace-Wahrscheinlichkeit ein. Auch lernen die Schülerinnen und Schüler bei dieser Gelegenheit zwischen den Begriffen Ergebnis und Ereignis zu unterscheiden. Für interessierte Schüler hält der Beitrag das schwache Gesetz der großen Zahlen bereit.

RAABE  
LEHRMATERIALIEN

# Ein anwendungsorientierter Einstieg in die Stochastik – der Farbkreisel

Rolf Schultz, Rinteln

Illustrationen von Rolf Schultz



Foto: Image Source/DigitalVision/Getty Images Plus

Mit dieser Unterrichtsreihe steigen Sie anwendungsorientiert in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik ein. Ihre Schüler basteln zunächst einen Farbkreisel, führen eine Reihe von Experimenten aus, die sie auswerten müssen, und erstellen dazu Balkendiagramme. Anhand dieser Ergebnisse können Sie den Zufallsbegriff gut veranschaulichen. Im Verlauf der Einheit führen Sie Häufigkeiten und die Laplace-Wahrscheinlichkeit ein. Auch lernen die Schülerinnen und Schüler bei dieser Gelegenheit zwischen den Begriffen *Ergebnis* und *Ereignis* zu unterscheiden. Für interessierte Schüler hält der Beitrag das schwache Gesetz der großen Zahlen bereit.

# Ein anwendungsorientierter Einstieg in die Stochastik – der Farbkreisel

Rolf Schultz, Rinteln

Illustrationen von Rolf Schultz

|   |              |
|---|--------------|
| <b>Hinweise</b>   | <b>1</b>     |
| <b>M 1 Konstruktionsanleitung für regelmäßige Vielecke</b>                        | <b>6</b>     |
| <b>M 2/M 3 Farbkreisel/Experimente mit dem Farbkreisel</b>                        | <b>7</b>     |
| <b>M 4 Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>                              | <b>9</b>     |
| <b>M 5/M 6 Der Zufall/Wie „ideal“ ist dein Farbkreisel?</b>                       | <b>10</b>    |
| <b>M 7/M 8 Das (schwache) Gesetz der großen Zahlen/<br/>Experiment „Münzwurf“</b> | <b>13</b>    |
| <b>M 9 Entbindungsstation</b>   | <b>14</b>    |
| <b>M 10–M 18 Übungsaufgaben und Anwendungen</b>                                   | <b>15–22</b> |
| <b>M 19/M20 Lernerfolgskontrolle I bzw. II</b>                                    | <b>23/25</b> |
| <b>Erläuterungen und Lösungen</b>   | <b>26</b>    |

## Die Schüler lernen:

anwendungsorientiert mit grundlegenden Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik umzugehen, zum Beispiel den Begriffen *Ergebnis* und *Ereignis*, *Laplace-Wahrscheinlichkeit*, *Zufallsexperiment* etc.





## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

**Ab** = Arbeitsblatt    **LEK** = Lernerfolgskontrolle

| Thema   | Material | Methode |
|---|----------|---------|
| Konstruktionsanleitung für regelmäßige Vierecke               | M1       | Ab      |
| Der Farbkreis/Experimente mit dem Farbkreis                   | M2/M3    | Ab      |
| Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung                     | M4       | Ab      |
| Der Zufall/Wie „ideal“ ist dein Farbkreis?                    | M5/M6    | Ab      |
| Das (schwache) Gesetz der großen Zahlen/Experiment „Münzwurf“ | M7/M8    | Ab      |
| Entbindungsstation  | M8/M9    | Ab      |
| Übungsaufgaben und Anwendungen                                | M10–M18  | Ab      |
| Lernerfolgskontrolle I bzw. II                                | M19/M20  | LEK     |

### Erklärung zu Differenzierungssymbolen

|  |   |   |
|--|---|---|
|   |  |  |
| einfaches Niveau   | mittleres Niveau  | schwieriges Niveau  |
|  | Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.  |   |

## Kompetenzprofil

**Inhalt:** Häufigkeit, Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis, Erwartungswert, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Balkendiagramm

**Medien:** GTR/CAS, GeoGebra

**Kompetenzen:** Mathematisch argumentieren und beweisen (K 1), Probleme mathematisch lösen (K 2), mathematisch modellieren (K 3), mathematische Darstellungen verwenden (K 4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K 5), kommunizieren (K 6)

## Hinweise zum Farbkreisel

Gleich welcher Altersstufe – der Stochastikunterricht fordert das Denken der Schülerinnen und Schüler auf ungewohnte Weise heraus. Zwar sind die wenigen Formeln und Rechenarten, die in einer ersten einführenden Einheit gebraucht werden, recht einfach und leicht handhabbar, doch fehlt vielen Schülerinnen und Schülern häufig die Klarheit und Eindeutigkeit, die sie von der bisherigen Schulmathematik gewohnt sind.

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass die meisten Aufgaben Textaufgaben sind, also eher eine bei den Lernenden ungeliebte Aufgabenform. Entsprechend der konkreten Lerngruppen müssen also verantwortbare Reduktionen vorgenommen werden, die es gerade schwächeren Schülerinnen und Schülern ermöglichen, eine „Richtschnur“ für ihr mathematisches Vorgehen in diesem Stoffgebiet zu erkennen.

Die Bedeutung der Stochastik, die heute in Alltag und Wissenschaft in unterschiedlichen Bereichen beobachtet werden kann, soll hier nicht aufgefächert werden. erinnert sei jedoch daran, dass die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung im (Glücks-)Spiel lagen. Die hier vorgestellte Reihe will dieser Tatsache Rechnung tragen, indem immer wieder spielerische Elemente integriert werden. Es ist gleichzeitig der Versuch, mögliche Frustrationen der Schülerinnen und Schüler durch Phasen des Spiels im Unterricht aufzufangen. Bei eher projektartigem Vorgehen kann der Bereich intensiviert, also zeitlich ausgedehnt werden, ohne die Stofffülle zu erhöhen.

Die Reihe behandelt statistische und wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen parallel und vergleichend, um den Zusammenhang der beiden Teilbereiche deutlich werden zu lassen. Im Sinne eines Minimalprogramms lassen sich Sequenzen inhaltlich kürzen, auf Sequenz 3 kann eventuell ganz verzichtet werden.

An wenigen Stellen werden Angaben in Prozenten verlangt; durch entsprechende Umformulierung dieser Aufgaben können diese problemlos im 8. Schuljahr im Anschluss an die Bruchrechnung eingesetzt werden. Für eine erste Einführung in die Stochastik ist die Unterrichtseinheit bei Bedarf auch noch in der 9./10. Jahrgangsstufe geeignet.

Entsprechend einiger Lehrpläne kann dann im Anschluss an die Sequenz 2 auf mehrstufige Zufallsexperimente (Baumdiagramm, Pfadregel) eingegangen werden.

## Ziele der Reihe

Die Schülerinnen und Schüler sollen

- zwischen statistischer und wahrscheinlichkeitstheoretischer Sichtweise unterscheiden lernen;
- Querverbindungen und Abhängigkeiten von Wahrscheinlichkeitsrechnungen und Statistik erkennen;
- einfache Rechnungen mit Laplace-Wahrscheinlichkeiten durchführen;
- den Erwartungswert eines Zufallsversuches berechnen und interpretieren können.

## Einführung in die Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Herstellung eines Farbkreisels (**M 1** und **M 2**) in der ersten Stunde hat in dieser Reihe einen dreifachen Nutzen:

Die Eigenständigkeit wirkt sich sehr motivierend auf die Schülerinnen und Schüler aus und weist sie auf einen wesentlichen Charakterzug der ganzen Unterrichtseinheit hin.

Es entstehen sehr unterschiedliche Ergebnisse, die eine Fülle von Auswertungsmöglichkeiten bieten. Die Lehrenden sollten sich daher auch schon während der Schülerarbeit einen Überblick über die verschiedenen Kreisel und entstehenden Strichlisten verschaffen. Die Versuchsergebnisse eignen sich sehr gut, um Gemeinsamkeiten, Querverbindungen und Unterschiede zwischen statistischen Ergebnissen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen zu erkennen und zu verdeutlichen.

Die Erstellung eines Balkendiagramms (**M 3**) kann in der Regel als bekannt vorausgesetzt werden. Die Schülerinnen und Schüler werden durch **M 3** in der zweiten Stunde gezielt aufgefordert, selbstständig Vergleiche anzustellen, andere Versuchsergebnisse als die eigenen zur Kenntnis und wichtig zu nehmen und sich aus diesen Vergleichen heraus schließlich eigene Gedanken zu machen und Hypothesen zu bilden. Für die Lehrenden ist dies gleichzeitig eine gute Möglichkeit, das echte oder scheinbare Vorwissen der Schülerinnen und Schüler in diesem Themenbereich zu erkunden.

Mit Sicherheit wird bei den Antwortversuchen der Begriff Zufall auftauchen, der in der 3./4. Stunde dann wieder herangezogen und hinterfragt werden kann. Die weitere Erörterung der Erklärungsversuche in **M 3** führt u. a. auch zu einer gewissen „Vorschau“ auf die weiteren zu untersuchenden Fragen in dieser Unterrichtseinheit.

Mit **M 4** wird diese Statistik-Phase zusammengefasst und mit den entsprechenden Fachbegriffen versehen.

Die Hausaufgabe (**M 5**) leitet über zur Idee der Laplace- oder Gleichwahrscheinlichkeit, die in der fünften Stunde mit **M 4** vorgestellt, erläutert und verglichen wird. Je nach Intention können an dieser Stelle auch die dazugehörigen wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe (insbesondere Ergebnis, Ereignis und Gegenereignis) eingeführt und geübt werden. Mit **M 6** werden die Ergebnisse des Farbkreisel-Experiments auf die neu gelernte Theorie angewandt und diskutiert. Diese Diskussion kann nach dem Kennenlernen des schwachen Gesetzes der großen Zahlen (**M 4** und **M 7**) in der sechsten Stunde noch weitergeführt werden. Dabei ist es jedoch vom Rechenaufwand her nur unter der Zuhilfenahme von Taschenrechnern zu vertreten, die Gültigkeit dieses Gesetzes anhand eines einfachen Experiments (**M 8**) quasi „erfahren“ zu lassen.

Eine Auswahl von Aufgaben zur relativen Häufigkeit und zur Gleichwahrscheinlichkeit aus **M 9**, **M 10** oder dem eingeführten Lehrbuch, die der Übung und Vertiefung dienen, rundet die Sequenz 1 ab.

### **Thema: Der Farbkreisel**

**Intention:** Die Schülerinnen und Schüler basteln in individueller Ausgestaltung einen Farbkreisel auf der Grundlage eines regelmäßigen Vielecks, führen damit eigene Versuche durch und dokumentieren diese in einer Strichliste.

## Würfelspielereien — erste Anwendungen

Die nächste Experimentierphase wird in der ersten Stunde mit **M 11** eingeleitet. Dabei werden die Schülerinnen und Schüler im Versuch A bewusst auf eine falsche Fährte gelockt, wenn sich  $h$  und  $p$  (in der Regel!) sehr stark voneinander unterscheiden. Sie sollen auf diese Weise selbst feststellen, dass die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten nach der ihnen bekannten Formel nur auf den ersten Blick so einfach ist. Mit **M 12** wird die genannte Diskrepanz in der zweiten Stunde aufgegriffen. Dabei wird das vorliegende Bild in eine „Additionstafel“ der zwei 6er-Würfel umgesetzt, sodass im Anschluss daran die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten im Versuch A selbstständig (evtl. als Hausaufgabe) errechnet werden können. Doch sollte man die Werte unbedingt überprüfen, da sie im Laufe der Sequenz 3 wieder herangezogen werden.

An dieser Stelle der Unterrichtseinheit ist es nun leicht möglich, zu mehrstufigen Zufallsversuchen überzugehen.

In der 3./4. Stunde soll nun die einleitende Frage von **M 11** beantwortet und auf andere (Bei-)Spiele übertragen werden. Auf **M 13** sind die dafür notwendigen Informationen bzgl. der Bedeutung der Würfelzahlen in verschiedenen Spielen zusammengetragen. Ergänzt werden sie noch durch den Hinweis auf die besondere Bedeutung einzelner Felder. Besonders beim Monopoly lohnt sich eine „wahrscheinlichkeitstheoretische“ Betrachtung. Von den Eckfeldern ausgehend können Wahrscheinlichkeiten berechnet und daraus (spielstrategische) Schlüsse gezogen werden.<sup>1</sup>

Mithilfe verschiedener Spiele wird die gleiche Fragestellung untersucht. Je nach der zur Verfügung stehenden Zeit und der zugrunde liegenden Intention des Unterrichts können die Spiele in arbeitsteiliger oder -gleicher Gruppenarbeit untersucht werden; unter Umständen könnten die aufgeführten Spiele natürlich auch in Gruppen gespielt und der Würfeltausch dabei konkret ausprobiert werden.

Eine kurze Theoriephase in der fünften Stunde beschließt die Sequenz (**M 14**).

In dieser Sequenz müssen aber auch immer wieder vertiefende Übungen angeboten werden; dazu soll **M 15** dienen.

---

<sup>1</sup> Näheres dazu vgl. **Witzek, Thorsten**: Mit Mathematik gewinnen. In: *mathematik lehren* 63 (1994). S. 12–15



## Der Erwartungswert

Die 1./2. Stunde der Sequenz 3 greift den selbst hergestellten Farbkreisel wieder auf und funktioniert ihn zu einem „Glücksrad“ um (**M 16** oder **M 17**). Die Frage nach dem voraussichtlichen durchschnittlichen Zahlenwert des Zahlenkreisels können aufgeweckte Schülerinnen und Schüler gut aus eigenen Überlegungen beantworten, indem sie auf das Produkt aus Zahl und zugehöriger Wahrscheinlichkeit verweisen. Selbstverständlich werden sie dabei im Normalfall von der in der Sequenz 1 (**M 6**) berechneten Gleichwahrscheinlichkeit ihres Kreisels ausgehen. Und logischerweise unterscheidet sich der vorausberechnete Durchschnitt von dem tatsächlich erzielten; die Diskrepanz werden sich die Schülerinnen und Schüler wieder – wie in Sequenz 1 – mit der (baulichen) Ungenauigkeit ihres Kreisels erklären.

Nach der systematischen und vergleichenden Darstellung über **M 4** in der dritten Stunde kann dieses Problem mit **M 4** noch in eine andere Richtung gelenkt werden. Mit passenden Beispielen aus **M 10** kann dann dieser Gedanke weiter vertieft werden, woraufhin der voraussichtliche durchschnittliche Zahlenwert des jeweiligen Kreisels erneut berechnet und mit dem statistischen Ergebnis verglichen werden sollte. Weitere Übungen dazu bieten die zwei Aufgaben in **M 18**.

Die Reihe wird abgeschlossen mit der LEK 2. Gerade in diesem mathematischen Themenbereich ist es allerdings sinnvoll (vgl. die didaktischen Überlegungen zur Reihe), eine „Probearbeit“ (LEK 1) als Hausaufgabe oder in der vierten Stunde vorwegzuschicken, die dann in der darauffolgenden Stunde intensiv besprochen wird.

## Glossar

Am Ende des Beitrags finden Sie ein Glossar für die Schülerhand, das alle wichtigen, im Beitrag vorkommenden, Begriffe beinhaltet.

# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Ein anwendungsorientierter Einstieg in die Stochastik*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)



### Ein anwendungsorientierter Einstieg in die Stochastik – der Farbkreislauf

Ralf Schütz, Bielefeld  
Illustrationen von Ralf Schütz



Foto: image Source/DigitalVision/Getty Images Plus

Mit dieser Unterrichtsstunde steigen Sie anwendungsorientiert in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastik ein. Ihre Schüler basieren zunächst einen Farbkreislauf, führen eine Reihe von Experimenten aus, die sie auswerten müssen, und erstellen dazu Balkendiagramme. Anhand dieser Ergebnisse können Sie den Zufallsbegriff gut veranschaulichen. Im Verlauf der Einheit führen Sie Häufigkeiten und die Laplace-Wahrscheinlichkeit ein. Auch lernen die Schülerinnen und Schüler bei dieser Gelegenheit zwischen den Begriffen Ergebnis und Ereignis zu unterscheiden. Für interessierte Schüler hält der Beitrag das schwache Gesetz der großen Zahlen bereit.

RAABE  
LEHRMATERIALIEN