Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Anwendungen zum Vektorprodukt

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de]

Anwendungen zum Vektorprodukt

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen: Dr. Wilfried Zappe

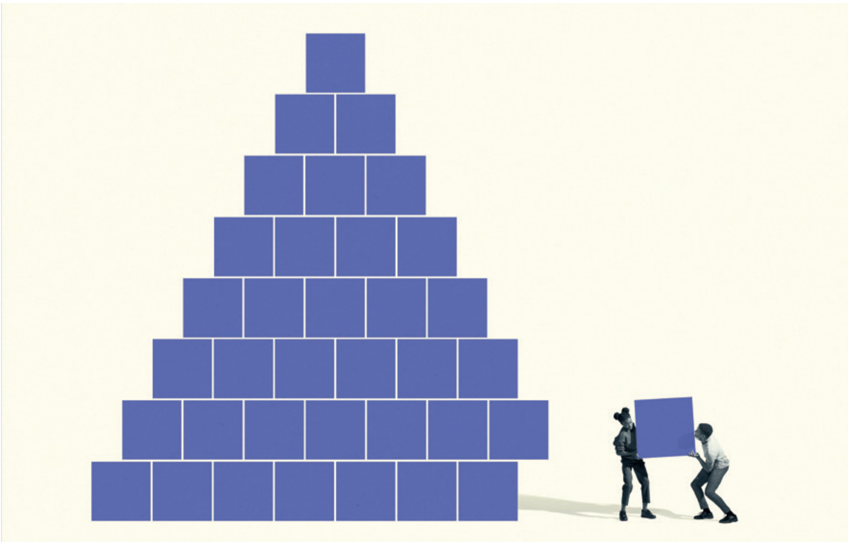
© Klaus Vedfelt/DigitalVision/Getty Images Plus

Dieser Beitrag beinhaltet Beispiele und Aufgaben (mit Lösungen) zum Thema „Vektorprodukt". Kenntnisse über das Vektorprodukt erleichtern viele Rechnungen z. B. in der analytischen Geometrie. Darüber hinaus stärken sie das geometrische Vorstellungsvermögen. Anliegen des Beitrages ist es, dass die Schülerinnen und Schüler das Vektorprodukt zweier Vektoren berechnen, geometrisch interpretieren und bei Aufgaben sicher anwenden können. Den Abschluss bildet ein Vorschlag für eine Lernerfolgskontrolle.

RAABE, KLASSE SCHULE

Anwendungen zum Vektorprodukt

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen: Dr. Wilfried Zappe



Dieser Beitrag beinhaltet Beispiele und Aufgaben (mit Lösungen) zum Thema „Vektorprodukt". Kenntnisse über das Vektorprodukt erleichtern viele Rechnungen z. B. in der analytischen Geometrie. Darüber hinaus stärken sie das geometrische Vorstellungsvermögen. Anliegen des Beitrages ist es, dass die Schülerinnen und Schüler das Vektorprodukt zweier Vektoren berechnen, geometrisch interpretieren und bei Aufgaben sicher anwenden können. Den Abschluss bildet ein Vorschlag für eine Lernerfolgskontrolle.

Anwendungen zum Vektorprodukt

Oberstufe (erhöhtes Niveau)

Dr. Wilfried Zappe
Illustrationen: Dr. Wilfried Zappe

Die Schüler lernen:

- Definition und Eigenschaften des Vektorprodukts zu erläutern,
- Anwendungen zu Skalar- und Vektorprodukt durchzuführen,
- Berechnungen von Flächeninhalten und Volumina u. a. vorzunehmen,
- Abstände zu berechnen.

Anliegen des Beitrages ist es, dass die Schüler das Vektorprodukt zweier Vektoren berechnen, geometrisch interpretieren und bei Aufgaben sicher anwenden können.
Es ergeben sich wichtige Anwendungen, z. B. bei der Berechnung von

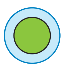
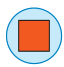
- Normalenvektoren von Ebenen,
- Flächeninhalten von Polygonen,
- Volumina von Polyedern,
- Abstandsaufgaben.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Grundlagen	M1	Ab
Berechnungen an Polygonen	M2	Ab
Berechnungen an Polyedern	M3	Ab
Normalen- und Koordinatengleichungen	M4	Ab
Abstände berechnen	M5	Ab
Lernerfolgskontrolle	M6	Ab, LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil

Inhalt: Definition, Eigenschaften, Beispiele, Aufgaben und Anwendungen zum Vektorprodukt

Medien: Ggf. Taschenrechner, CAS-Rechner

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise zu „Anwendungen zum Vektorprodukt"

Das Vektorprodukt wird – im Gegensatz zum Skalarprodukt – nicht explizit in den Bildungsstandards für die Sekundarstufe II benannt. Trotzdem findet es Eingang in Lehrpläne der gymnasialen Oberstufe, wie das folgende Beispiel belegt. Das liegt wohl vor allem daran, dass sich mit dem Vektorprodukt viele Rechnungen stark vereinfachen und es das geometrische Vorstellungsvermögen der Lernenden stärkt.

LP Bayern

„Die Jugendlichen erkennen, dass zur Bestimmung von orthogonalen Vektoren das Vektorprodukt vorteilhaft eingesetzt werden kann. Der praktische Nutzen von Skalar- und Vektorprodukt wird ihnen auch bei der Ermittlung von Flächeninhalten und Volumina geeigneter geometrischer Objekte deutlich. Bei der Beschreibung und Untersuchung geometrischer Figuren und Körper sind die Schüler nun in der Lage, sowohl auf die Vektorrechnung als auch auf grundlegende Verfahren aus der Mittelstufe zurückzugreifen.

- dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem Darstellen von Punkten und einfachen Körpern
- Vektoren im Anschauungsraum, Rechnen mit Vektoren
- Anwendungen von Skalar- und Vektorprodukt
- Berechnungen an Körpern, u. a. Flächeninhalte und Volumina"

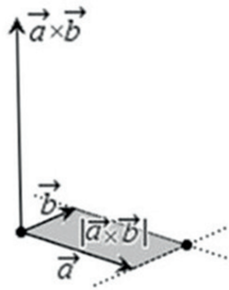
http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26192.html

(zuletzt aufgerufen am 12.01.2021)

Eine Einführung zur Definition und Eigenschaften des Vektorprodukts bietet Ihnen das Material **M 1**. Dieses Arbeitsblatt können Sie auch für eine Zusammenfassung und Wiederholung nutzen. Darauf aufbauend festigen die ersten Aufgaben diese Kenntnisse bei den Jugendlichen. Für verschiedene geometrische Anwendungen stehen Ihnen in weiteren Arbeitsblättern durchgerechnete Beispiele und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zur Verfügung. Dabei können Sie häufig auch elementargeometrische Kenntnisse aus der Mittelstufe wiederholen. Die Aufgaben unterscheiden sich nach verschiedenen Schwierigkeitsgraden, damit erreichen Sie eine Differenzierung.

M 1 Grundlagen

Das **Vektorprodukt** (auch **„Kreuzprodukt“**) $\vec{a}\times\vec{b}$ der nicht kollinearen (gleich- bzw. gegen gerichteten) Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet. Der Betrag dieses Vektors entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird (siehe Abbildung rechts).



Grafik Dr. W. Zappe

Zur Definition des Vektorprodukts:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

Gesucht ist ein Vektor $\vec{c}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, der orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Es muss also gelten

$\vec{a}\circ\vec{c}=0$ und $\vec{b}\circ\vec{c}=0$. Dies ergibt das folgende Gleichungssystem.

(1) $a_1\cdot x+a_2\cdot y+a_3\cdot z=0$

(2) $b_1\cdot x+b_2\cdot y+b_3\cdot z=0$

Gleichung (1) wird mit $-b_1$ und Gleichung (2) mit a_1 multipliziert, dann werden beide Gleichungen addiert zur Gleichung (3):

(3) $(a_1\cdot b_1-a_1\cdot b_1)\cdot x+(a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1)\cdot y+(a_1\cdot b_3-a_3\cdot b_1)\cdot z=0$

Der erste Summand wird null. Setzt man $y=-(a_1\cdot b_3-a_3\cdot b_1)=(a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3)$ und $z=(a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1)$, so ist Gleichung (3) erfüllt. Setzt man diese beiden Terme in Gleichung (1) ein, so erhält man Gleichung (4) mit

(4) $a_1\cdot x+a_2\cdot(a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3)+a_3\cdot(a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1)=0$

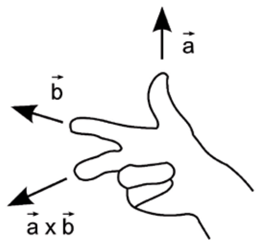
Daraus erhält man für $a_1\neq 0$ aus (4) $x=(a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2)$.

Damit ist $\vec{c}=\begin{pmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$.

Es gilt also:

1. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\gamma)$ mit $\gamma = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$
2. $\vec{a}\times\vec{b}$ ist sowohl orthogonal (senkrecht) zu $\vec{a}$, als auch orthogonal zu $\vec{b}$.
3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Die Eigenschaft (3) kann z. B. mit der „**Rechte-Hand-Regel**" veranschaulicht werden: Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ zeigen in dieser Reihenfolge in die Richtungen wie Daumen, Zeigefinger und abgespreizter Mittelfinger der rechten Hand.



Grafik: Wikipedia (gemeinfrei)

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt für den Vektor

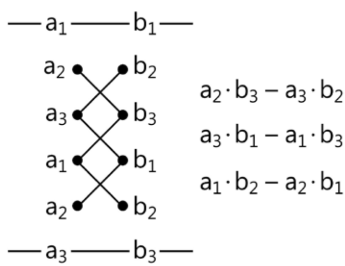
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Wichtige Eigenschaften $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$:

(1) $\vec{b}\times\vec{a} = -\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ (2) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (3) $\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\times\left(\mu\cdot\vec{b}\right) = \lambda\cdot\mu\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

Berechnungsschema:

- Schreiben Sie die gegebenen Vektoren zweimal komponentenweise untereinander.
- Streichen Sie die oberste und die unterste Zeile, sie sind für die Berechnung nicht notwendig.
- Betrachten Sie die 1. und 2. Zeile der nicht durchgestrichenen Zeilen für die x-Koordinate, die 2. und 3. Zeile für die y-Koordinate und die 3. und 4. Zeile für die z-Koordinate des Ergebnisvektors.
- Bilden Sie die Produkte der Komponenten „über Kreuz" und bilden Sie jeweils die Differenz der Produkte.

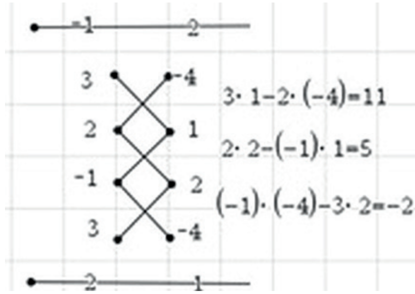


Grafik Dr. W. Zettlmeier

Beispiel:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-4) - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Grafik Dr. W. Zappe

Nachweis der Orthogonalität von $\vec{c}$ mit $\vec{a}$ und mit $\vec{b}$ mithilfe des Skalarprodukts:

$$\vec{c} \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -11 + 15 - 4 = 0$$

$$\vec{c} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 22 - 20 - 2 = 0$$

Berechnung mit digitalen Werkzeugen, z. B.

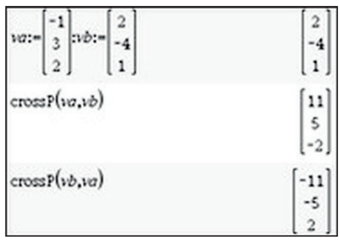
TI-Nspire CAS:

crossp([a; b; c],[d; e; f]),

GeoGebra:

Kreuzprodukt({a, b, c},{d, e, f}) bzw.

Cross({a, b, c}, {d, e, f}) je nach Spracheinstellung.



Grafik Dr. W. Zappe

Auch moderne wissenschaftliche Taschenrechner verfügen häufig über eine Applikation zur Berechnung des Vektorprodukts.

Aufgaben

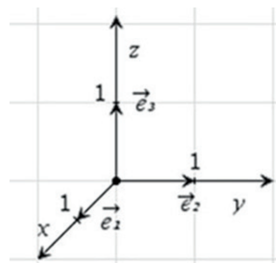
Aufgabe	1	2	3	4	5
Niveau					

1. Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$ ohne Hilfsmittel. Führen Sie mithilfe des Skalarprodukts die Probe auf Orthogonalität durch.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Berechnen Sie das Kreuzprodukt von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

3. Gegeben sind die Einheitsvektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ eines kartesischen Koordinatensystems. Begründen Sie aus der Anschauung heraus und mit der „Rechte-Hand-Regel“, dass gilt $\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}$ sowie $\vec{e_1} \times \vec{e_3} = -\vec{e_2}$.
   Weisen Sie diese Aussage auch rechnerisch nach.



Grafik Dr. W. Zappe

4. Kreuzen Sie an, welche der Aussagen wahr sind. Korrigieren Sie falsche Aussagen.

$\vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}$	$\vec{e_1} \times (-\vec{e_2}) = \vec{e_3}$	$(-\vec{e_1}) \times (-\vec{e_2}) = -\vec{e_3}$	$\vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1}$

5. Erläutern Sie, wie die Vektorprodukte durch Zurückführen auf die Einheitsvektoren ermittelt werden können.

   a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$

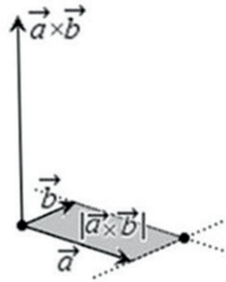
M 2 Berechnungen an Polygonen

Beispiel:

Berechnen Sie mithilfe des Vektorprodukts den Flächeninhalt A_P des Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Erstellen Sie zum Vergleich eine Kontrollrechnung mithilfe der trigonometrischen Beziehung

$$A_P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = g \cdot h = |\vec{a}| \cdot \left(|\vec{b}| \cdot \sin(\gamma)\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\gamma),$$

wenn γ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.



Grafik Dr. W. Zappe

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Wir wenden an: Der Betrag des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Lösung zu a:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) \\ 5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und damit}$$

$$A_P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 13^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 169 + 4} = \sqrt{189} = \sqrt{9 \cdot 21} = 3 \cdot \sqrt{21} \approx 13{,}75 \text{ FE}$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 13,75 FE.

Kontrollrechnung:

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{38}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Winkel zwischen den Vektoren berechnen:

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \cos(\gamma) = \frac{5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2)}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow \gamma \approx 94{,}2°$$

$$A_P = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\gamma) = \sqrt{38} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(94{,}2°) \approx 13{,}75 \text{ FE}$$

Anwendungen zum Vektorprodukt

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen: Dr. Wilfried Zappe

© Klaus Vedfelt/DigitalVision/Getty Images Plus

Dieser Beitrag beinhaltet Beispiele und Aufgaben (mit Lösungen) zum Thema „Vektorprodukt“. Kenntnisse über das Vektorprodukt erleichtern viele Rechnungen z. B. in der analytischen Geometrie. Darüber hinaus stärken sie das geometrische Vorstellungsvermögen. Anliegen des Beitrages ist es, dass die Schülerinnen und Schüler das Vektorprodukt zweier Vektoren berechnen, geometrisch interpretieren und bei Aufgaben sicher anwenden können. Den Abschluss bildet ein Vorschlag für eine Lernerfolgskontrolle.

RAABE, KLASSE SCHULE