



# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Der Trojaner*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)



# Die Trojaner – Begleiter des Planeten Jupiter

Werner Auer, Fürth

Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier



© da-kuk/E+/Getty Images Plus

Die Schülerinnen und Schüler lernen mithilfe des sog. kreisförmig eingeschränkten Dreikörperproblems und des Hebelgesetzes Fakten über das System Sonne-Jupiter und Saturn, also über den Schwerpunkt des Systems, kennen. Ferner bekommen sie Kenntnisse über Asteroiden, insbesondere über die sog. Trojaner mit Bahnbestimmungselementen. Dabei spielt das 3. Gesetz von Kepler eine besondere Rolle, gelingt es doch damit z. B. die Masse eines Trojaners zu bestimmen. Tiefergehend geht es dann um die exakte Lösung des Dreikörperproblems – unter der oben genannten Bedingung – nach Lagrange. Hier im Beitrag beschränken wir uns auf die Lagrangepunkte  $L_4$  und  $L_5$ .

# Die Trojaner – Begleiter des Planeten Jupiter

## Oberstufe (grundlegend und weiterführend)

Werner Auer, Fürth

Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier

---

<b>Hinweise</b>	<b>1</b>
<b>M 1 Aufgaben</b>	<b>4</b>
<b>M 2 Daten</b>	<b>7</b>
<b>M 3 Der gravitative Einfluss der Trojaner auf die Sonne</b>	<b>9</b>
<b>Lösungen</b>	<b>11</b>

---

### Die Schüler lernen:

im System Jupiter-Sonne genauere Verhältnisse durch das sogenannte kreisförmig eingeschränkte Dreikörperproblem kennen. Der Beitrag führt ihnen zwei der fünf Lagrangepunkte mit ihren Auswirkungen vor Augen, nämlich die Lagrangepunkte  $L_4$  und  $L_5$ .

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

**Ab** = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M1	Ab
Daten	M2	Ab
Der gravitative Einfluss der Trojaner auf die Sonne	M3	Ab

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** kreisförmig eingeschränktes Dreikörperproblem, Schwerpunkt, Hebelgesetz, Asteroid, Kepler'sche Gesetze (insbesondere das dritte), Masse, (fünf) Lagrangepunkte, Kosinussatz, Rechnen mit Wurzeln

**Medien:** GTR/CAS, GeoGebra

**Kompetenzen:** Über Basiswissen verfügen (F1), Kenntnisse wiedergeben (F2), Probleme lösen (F3), Wissen kontextbezogen anwenden (F4), Analogien bilden (F5), Phänomene beschreiben (E1), Informationen auswählen (E2), Modellvorstellungen verwenden (E3), Formeln anwenden (E4), Idealisierungen vornehmen (E5), Wissen austauschen (K1), Recherchieren (K3), Präsentieren (K6), Diskutieren (K7)

## Hinweise zu den Trojanern

Die Lösung des sogenannten **Dreikörperproblems** ist trotz zahlreicher Versuche vieler bekannter Mathematiker nur numerisch gelungen. Nun fand im achtzehnten Jahrhundert der Mathematiker Lagrange für das sogenannte eingeschränkte Dreikörperproblem eine exakte Lösung, wenn die Masse des dritten Körpers keinen Einfluss auf die Bewegung der beiden anderen massereicheren Körper ausübt. Er bestimmte fünf sogenannte **Librationspunkte**, die zu seinen Ehren **Lagrangepunkte** genannt wurden.

Die Lagrangepunkte  $L_1$  und  $L_2$  der Erde sind in der Astronomie von großer Bedeutung. In diese Punkte hat man **Beobachtungssatelliten** gebracht, um von dort (z. B. von  $L_1$  aus) die Sonne das ganze Jahr über ungehindert beobachten zu können.

Die hier untersuchten Begleiter des Planeten Jupiter – sie werden **Trojaner** genannt – befinden sich in den Lagrangepunkten  $L_4$  und  $L_5$ , also  $60^\circ$  vor bzw.  $60^\circ$  hinter Jupiter in stabilen Umlaufbahnen mit derselben Umlaufzeit wie Jupiter. Es sind insgesamt über 6000 Asteroiden, die erst ab dem Jahr 1906 nach und nach entdeckt wurden.

### Lehrplanbezug

Das Niveau ist für die Oberstufe geeignet, aber grundlegend. Die Schülerinnen und Schüler<sup>1</sup> arbeiten entweder einzeln oder in Partnerarbeit. Dabei recherchieren sie mithilfe des Internets. Sie lernen physikalische Texte zu erfassen, zu vergleichen und zu bewerten. Sie zerlegen die erkannten Probleme und reflektieren ihre Ergebnisse. Als mathematische Grundvoraussetzungen sind die Kenntnis des Kosinussatzes sowie ein etwas tiefergehendes Rechnen mit Wurzeln erforderlich.

### Fachliche Hinweise

Da das Bestimmen der Bahn eines Körpers im **Zweikörperproblem** mithilfe der Gleichungen von Newton exakt gelöst werden kann, versuchte man, die Bahn eines Körpers im **Dreikörperproblem** zu bestimmen. Es stellte sich heraus, dass dieses Problem, wenn sich ein Körper im Gravitationsfeld zweier anderer Körper bewegte, nur näherungsweise mit numerischen Methoden zu lösen war. Der Astronom und Mathematiker Joseph-Louis

---

<sup>1</sup> Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

Lagrange hat nun gegen Ende des achtzehnten Jahrhunderts eine exakte Lösung zu diesem Problem vorgelegt, wenn er folgende Annahmen machte:

- „(I) Die Masse des Körpers, dessen Bewegung studiert werden soll, ist sehr klein gegenüber den Massen  $m_1$  und  $m_2$  der beiden anderen Körper. Die kleine Masse  $m$  beeinflusst also die Bahn der beiden großen Massen nicht.
- (II) Die beiden massereicheren Körper bewegen sich auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.
- (III) Der massearme Körper bewegt sich in derselben Ebene, in der auch die Kreisbahnen der beiden anderen Körper liegen.“<sup>2</sup>

Lagrange fand als Lösung dieses Problems im System zweier Himmelskörper fünf Punkte, die sogenannten Librationspunkte, an denen ein weiterer Körper antriebslos den massereicheren Himmelskörper mit der derselben Umlaufzeit wie der masseärmere Körper umkreisen kann. Er ändert dabei relativ zu diesem seine Position nicht.

Zur Betrachtung und weiteren Erörterung wählt man als die beiden massereicheren Himmelskörper die Sonne und den Planeten Jupiter.

**Siehe dazu Abbildung 1:**

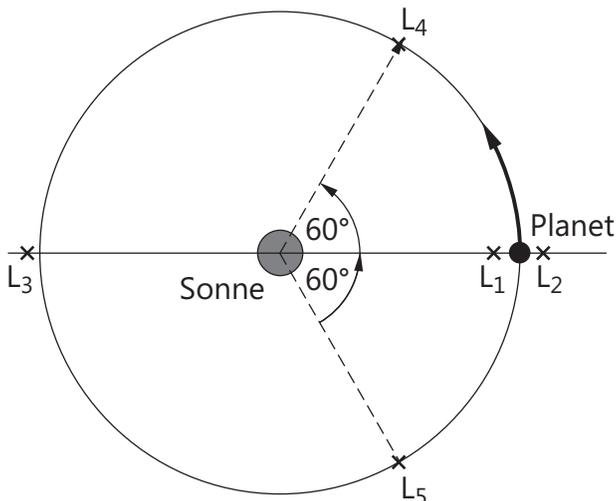


Abbildung 1; Grafik: Dr. W. Zettlmeier

<sup>2</sup> Gerhard Deyke: A.6.13 Das sog. kreisförmig eingeschränkte Drei-Körper-Problem



# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Der Trojaner*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)

