Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Konfidenz-Intervalle

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

Konfidenzintervalle

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. Wilfried Zappe

Wie viel Prozent der Wähler werden sich bei der nächsten Bundestagswahl für die FDP entscheiden? Wie hoch wird die Wahlbeteiligung ausfallen? Solchen und ähnlichen Fragen können Ihre Schülerinnen und Schüler in diesem Beitrag statistisch auf den Grund gehen. Mit bekannten relativen Häufigkeiten aus Stichproben (etwa Umfragen) berechnen die Lernenden Konfidenzintervalle oder bestimmen bei bekannten Wahrscheinlichkeiten die zugehörigen Prognoseintervalle. Neben den genauen Formeln bietet dieser Betrag auch Näherungsformeln und Abschätzungen an, die auch ohne einen CAS-Rechner bestimmt werden können.

Konfidenzintervalle

Oberstufe (erhöhtes Niveau)

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. Wilfried Zappe

Hinweise 1

M 1 Sigma-Regeln der Binomialverteilung 2

M 2 Prognoseintervalle 3

M 3 Binomialverteilung näherungsweise anwenden 4

M 4 Konfidenzintervalle – eine Einführung 5

M 5 Eine Näherungsformel für Konfidenzintervalle 13

M 6 Stichprobenumfang abschätzen 16

M 7 Eine „Faustformel" 18

M 8 Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen! 20

Lösungen 22

Die Schüler lernen:

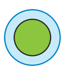
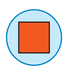
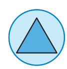
den Begriff der Prognoseintervalle anzuwenden, um Konfidenzintervalle zu bestimmen, Konfidenzintervalle mithilfe eines CAS-Rechners zu berechnen und zu interpretieren, eine Näherungsformel für Konfidenzintervalle kennen, Stichprobenumfänge abzuschätzen, eine „Faustformel" kennen, mit deren Hilfe Prognose- oder Konfidenzintervalle sowie Stichprobenumfänge abgeschätzt werden können.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt, **LEK** = Lernerfolgskontrolle, **Wh** = Wiederholung

Thema	Material	Methode
Sigma-Regeln der Binomialverteilung – frischen Sie Ihr Wissen auf!	M 1	Ab, Wh
Prognoseintervalle – Wiederholung	M 2	Ab, Wh
Binomialverteilung näherungsweise anwenden	M 3	Ab
Konfidenzintervalle – eine Einführung	M 4	Ab
Eine Näherungsformel für Konfidenzintervalle	M 5	Ab
Stichprobenumfang abschätzen	M 6	Ab
Eine „Faustformel“	M 7	Ab
Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	M 8	Ab, LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Binomialverteilung, Sigma-Regeln, Prognose- und Konfidenzintervalle, Konfidenzellipse, Näherungsformel und Abschätzung für Konfidenzintervalle

Medien: GTR/CAS

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Konfidenzintervalle – Hinweise

Bei der Bundestagswahl sind alle Wahlberechtigten in Deutschland aufgerufen, sich für eine der zugelassenen Parteien zu entscheiden. Zwischen den Wahlen hingegen ermitteln Meinungsforschungsinstitute mit der sogenannten „Sonntagsfrage“ die aktuelle politische Stimmung in Deutschland, indem sie einige tausend repräsentativ ausgewählte Wahlberechtigte stichprobenartig befragen. Repräsentativ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Gruppe der Befragten möglichst gut die Bevölkerung in Deutschland widerspiegelt. Die befragten Personen einer solchen Umfrage bilden eine zufällige Stichprobe aus der Gesamtheit aller Wahlberechtigten.

Ähnliche Ergebnisse von stichprobenartigen Umfragen gibt es natürlich auch zu anderen Themen. Fast täglich kann man sie den Medien entnehmen.

Allgemein lässt sich die Ausgangssituation so beschreiben: Man möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit p ein bestimmtes Merkmal einer Zufallsgröße in einer Gesamtheit vorkommt. Der Umfang der Gesamtheit ist aber zu groß, um diesen Anteil direkt zu messen. Deshalb wird eine Stichprobe erhoben, in der sich die relative Häufigkeit des bestimmten Merkmals leicht berechnen lässt. Diese relative Häufigkeit ist aber nur eine Punktschätzung für die unbekannte Wahrscheinlichkeit. Die Ergebnisse einer Stichprobe tragen Zufallscharakter, daher kann man die unbekannte Wahrscheinlichkeit besser durch ein Intervall schätzen. Dieses bestimmt man mithilfe einer Punktschätzung.

Die Ermittlung und Interpretation solcher „Konfidenzintervalle“ ist Gegenstand dieses Beitrages. Er beschränkt sich auf exakt oder näherungsweise binomialverteilte Zufallsgrößen. Die Kenntnisse über Prognoseintervalle aus einem früheren Beitrag[1] dieser Reihe sind eine große Hilfe beim Verständnis der Konfidenzintervalle.

[1] vgl. R0451-201005 Prognoseintervalle mit CAS-Rechner (U.6.8; EL 67; Okt. 2020)

M 1 Sigma-Regeln der Binomialverteilung – frischen Sie Ihr Wissen auf!

Im Folgenden sollten Sie einige Sachverhalte wiederholen, die für das Verständnis der Ermittlung und Interpretation von Konfidenzintervallen wichtig sind. Eine ausführlichere Darstellung dazu finden Sie in dem Beitrag „Prognoseintervalle" der Raabe-Unterrichtsmaterialien.

Die Sigma-Regeln bringen zum Ausdruck, wie viel Prozent der Werte einer binomialverteilten Zufallsgröße X näherungsweise in einem vorgegebenen Vielfachen der Sigma-Umgebung des Erwartungswertes liegen.

Ist die Zufallsgröße X mit den Parametern n und p binomialverteilt, dann gelten für ihren Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und ihre Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ für genügend große n näherungsweise folgende Intervallwahrscheinlichkeiten:

k	$P(\mu - k \cdot \sigma \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma) \approx$	k	$P(\mu - k \cdot \sigma \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma) \approx$
1	0,683	1,64	0,90
2	0,955	1,96	0,95
3	0,997	2,58	0,99

Für alle nachkommenden Untersuchungen zu Prognose- und Konfidenzintervallen verwenden Sie vorwiegend die folgende Näherung der Zwei-Sigma-Regel:

Für genügend große Werte von n liegen ca. 95 % der Werte einer Binomialverteilung in der Zwei-Sigma-Umgebung ihres Erwartungswertes.[2]

$P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 0{,}95$

Hinweis: Alles, was Sie in diesem Zusammenhang für k = 2 lernen, können Sie problemlos auf andere Werte von k übertragen.

[2] Häufig liest man auch von der Bedingung, dass $\sigma > 3$ erfüllt sein muss.

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Konfidenz-Intervalle

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de