



# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

**Auszug aus:**

*Die Bedeutung der zweiten Ableitung*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)



# II.A.31

## Analysis

# Die Bedeutung der zweiten Ableitung

Florian Borges, Traunstein

Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing



© RAABE 2020

© Ashley Cooper/The Image Bank/Getty Images Plus

Funktionale Zusammenhänge zwischen zwei Zahlenbereichen (üblicherweise  $x$  und  $y = f(x)$ ) werden gern als Graphen dargestellt, deren Steigungsverhalten sich in vielfältiger Weise ändern kann. Der Graph kann steigen, dann immer stärker steigen oder immer weniger stark. Entsprechendes gilt für das Fallen. Analytisch wird dieses grafische Verhalten beschrieben durch die 1. bzw. 2. Ableitung und insbesondere deren Vorzeichen bzw. Nullstellen. Haben die Schüler die Ankeridee der 1. Ableitung verstanden, stellt auch der Transfer auf die Ableitung der Ableitung bzw. die 2. Ableitung kein großes Problem mehr dar.

---

### KOMPETENZPROFIL

<b>Klassenstufe:</b>	11/12 (G9)
<b>Dauer:</b>	6–8 Unterrichtsstunden
<b>Kompetenzen:</b>	Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), Mathematisch modellieren (K3), Mathematische Darstellungen verwenden (K4), Kommunizieren (K5)
<b>Thematische Bereiche:</b>	Differenzialrechnung
<b>Zusatzmaterialien:</b>	GeoGebra-Dateien auf CD-ROM 78

---

## Didaktisch-methodische Hinweise

Die Ankeridee<sup>1</sup> der Ableitungsfunktion – als Lieferantin der Tangentensteigung – ist als erster Baustein der analytischen Kurvendiskussion nach den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen der typische **Einstieg** in die Infinitesimalrechnung. Nach Einführung der aus Schülersicht meist erfreulich gut handhabbaren **Ableitungsregeln** und reichlich Übung derselben stellt sich sinnvollerweise u. a. die Frage nach der 2. Ableitung und ihrem anschaulichen Sinn als „Steigung der Steigung“. Die **Krümmungsrichtung** des Graphen – je nach Vorzeichen dieser 2. Ableitung – betrachten Sie im Unterricht meist nur qualitativ. Das vertiefende Problem ihrer fehlenden quantitativen Aussagekraft fällt leider wegen Zeitmangel oft unter den Tisch, wird hier aber optional als Material für besonders interessierte Schülerinnen und Schüler<sup>2</sup> angeboten. Die vollständige „klassische“ **Kurvendiskussion** einschließlich der systematischen **Wendepunktesuche** schließt mit einer größeren Übung ab.

### Ablauf

Beginnen Sie in Kleingruppen mit der **Bedeutung der (1.) Ableitung** (Wiederholung, **M 1**) als Grenzübergang von der Sekanten- zur Tangentensteigung. Nach den „lästigen“  $h$ - bzw.  $(x - x_0)$ -Kürzungen erinnern Sie an die bereits bekannten **Ableitungsregeln** (Wiederholung, **M 2**) mit der übersichtlichen Kopiervorlage zu Aufgabe 2.

Das Herzstück des Gesamtbeitrags folgt schrittweise: zunächst die **Bedeutung der 2. Ableitung (M 3)**. Die Aussage der 2. Ableitung zur Krümmungsrichtung des Graphen ist dabei allgemein übliche Oberstufen-Hausmannskost in Mathematik (zusammenfassend dargestellt **M 4**).

Eher nur in leistungsstärkeren Lerngruppen bzw. bei ausreichendem Zeitpuffer angezeigt ist die optionale Ergänzung **M 5**. Hier wird der Krümmungskreis als Analogon zur Tangente bei der Steigung thematisiert und entsprechend als Näherung für den Kurvenverlauf interpretiert. Die Aufgabe dazu ist eine sehr „hässliche“ Algebraübung, sorgt aber ggf. für ein deutlich tieferes Verständnis der Rolle von  $f''(x)$ . Zusammenfassend werden dann die verbreiteten Module der Kurvendiskussion bei Nullstellen, Extrema und Wendestellen im Überblick (**M 6**) behandelt, ehe die Abschlussübung (**M 7**), auch einsetzbar als Lernerfolgskontrolle, das Thema abrundet.

### Vorkenntnisse

Die Schüler kennen die schulüblichen Funktionen und deren Ableitungsregeln, erste Grundelemente der Kurvendiskussion sind geläufig.

### Vorbereitung und Ablauf der Arbeit an der Lerntheke

**Einstieg:** Sammeln Sie die **Vorkenntnisse** bzgl. des Begriffes „Steigung“ bei den Jugendlichen: Warum kann eine (zugegebenermaßen recht steile) Straße durchaus 150 % Steigung haben und welchem Winkel entspricht das?

Sie kopieren dann die Materialien **M 1–M 7** (ggf. ohne das optionale **M 5**) in Klassenstärke und laminieren jeweils ein Exemplar, das Sie mit den Kopien an einem zentralen Ort im Klassenraum auslegen. Die Schüler werden von Ihnen in Arbeitsgruppen aufgeteilt, holen sich die Materialien jeweils in Gruppenstärke und fertigen in der Gruppe für **M 1–M 7** ggf. jeweils eine Folie mit den Aufgabenlösungen an, die dann in der Folgestunde von einem Gruppenmitglied im Plenum vorgestellt und bei Bedarf gemeinsam „verbessert“ werden.

<sup>1</sup> „Ankeridee“ ist in der fachdidaktischen Literatur ein anderes Wort für „Oberbegriff“.

<sup>2</sup> Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

**Ziele**

Die Schüler

- wiederholen die Theorie zur Ableitung verschiedenster Funktionen.
- erkennen die Sinnhaftigkeit der wiederholten Anwendung dieser Regeln und deren grafische Bedeutung.
- vertiefen ggf. in **M 5** den Unterschied qualitativer und quantitativer Aussagen in dieser Hinsicht.
- üben zusammenfassend die schließlich vollzähligen Werkzeuge als Bestandteile einer Kurvendiskussion.

**Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz**

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K1, K2, K5	L4, L3	... vergegenwärtigen sich die wesentliche Bedeutung der 1. Ableitung ( <b>M 1</b> , <b>M 2</b> ), ... zeigen Sicherheit im Umgang mit den zu wiederholenden Ableitungsregeln ( <b>M 2</b> ),	I, II
K1, K5	L4	... erkennen nach zunächst ritualisierter Bestimmung der 2. Ableitung als „Ableitung der Ableitung“ die Aussagekraft und Bedeutung dieser Funktion ( <b>M 3</b> ),	II
K1, K3, K5	L4, L3	... vergleichen die Übertragung der Begriffe „Steigung“ von der Geraden auf eine Kurve sowie „Krümmung“ von einem (Krümmungs-) Kreis auf eine Kurve ( <b>M 4</b> ),	II
K1, K2, K3, K5	L4	... verstehen ggf. die eingeschränkte (rein qualitative) Aussagekraft der 2. Ableitung bzgl. Krümmung nach algebraischer Erfassung der Tatsache, dass für die Krümmung tatsächlich auch die 1. Ableitung der Funktion an dieser Stelle eine wesentliche Rolle spielt ( <b>M 5</b> ),	III
K1, K2, K5	L4, L3	... verbinden die Elemente der Kurvendiskussion zu einem effizienten Analysis-Werkzeugset ( <b>M 6</b> und <b>M 7</b> ).	II, III

## Auf einen Blick

Legende der Abkürzungen

Ab = Arbeitsblatt; Fo = Folie; Wh = Wiederholungsblatt; LEK = Lernerfolgskontrolle

### 1./2. Stunde

**Thema:** **Einstieg**

- M 1** (Wh) Bedeutung der 1. Ableitung – frischen Sie Ihr Wissen auf!  
Zusammenhang zwischen Funktions- und Ableitungsgraph, grafisches Ableiten
- M 2** (Wh) Ableitungsübungen – frischen Sie Ihr Wissen auf!  
Wichtige Ableitungsregeln

**Benötigt:**  OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard  
 Computer mit dynamischer Geometriesoftware GeoGebra

### 3.–6. Stunde

**Thema:** **Die Grundlagen schaffen**

- M 3** (Ab) Die Bedeutung der 2. Ableitung  
Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion, 1. und 2. Ableitung, „Krümmung“ oder „Steigung der Steigung“
- M 4** (Ab) Steigung und Krümmung – qualitativ und quantitativ  
Die tatsächlich qualitativ brauchbare 1. Ableitung als Wert der (Tangenten-) Steigung an einer Stelle im Vergleich zur Vorzeichenregel der 2. Ableitung für die Krümmungsrichtung des Funktionsgraphen ebenda
- M 5** (Ab) Krümmung und 2. Ableitung – quantitativ  
Approximiert man lokal den Funktionsgraphen durch seinen Krümmungskreis, dann lässt sich aus dessen Radius herleiten, dass für eine quantitative Aussage zur Krümmung außer der 2. auch die 1. Ableitung wesentlich ist.

**Benötigt:**  OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard  
 Computer mit dynamischer Geometriesoftware GeoGebra

### 7./8. Stunde

**Thema:** **Weiterführung und Vertiefung**

- M 6** (Ab) Nullstellen, Extrema und Wendestellen im Überblick  
Zusammenfassung der Module zur Kurvendiskussion
- M 7** (LEK) Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!  
Klausurvorschlag

**Benötigt:**  OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard  
 Computer mit dynamischer Geometriesoftware GeoGebra





# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

**Auszug aus:**

*Die Bedeutung der zweiten Ableitung*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)

