



SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus: *Grafisches Integrieren*

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Grafisches Integrieren – Lernzirkel zur Analysis

von Dr. Jürgen Leitz



© Tom Werner/DigitalVision/Getty Images

In diesem Beitrag soll der Graph einer Stammfunktion zeichnerisch gewonnen werden. Im ersten Teil des Beitrags werden die Grundlagen wiederholt und das grafische Integrieren erläutert. Im zweiten Teil des Beitrags haben Ihre Schüler die Möglichkeit das gewonnene Wissen durch abgestimmte Aufgaben innerhalb eines Lernzirkels anzuwenden und zu festigen.

Grafisches Integrieren – Lernzirkel zur Analysis

von Dr. Jürgen Leitz

Vorbemerkungen	1
Aufgabenteil grafisches Differenzieren	5
Lösungen grafisches Differenzieren	9
Aufgabenteil grafisches Integrieren	13
Lösungen grafisches Integrieren	17
Verfahren zum grafischen Integrieren	20
Lernzirkel	27
Lösungen des Lernzirkels	47

Kompetenzprofil:

Inhalt:	Differenzieren, Ableitungen, Ableitungsfunktion, Extrempunkte, Wende- und Sattelpunkt, Nullstelle, Monotonie, Vorzeichenwechsel, Steigung, Änderungsrate, Tangente, waagerechte Tangente, Krümmung, Symmetrie, Integrieren („Aufleiten“), Stammfunktion
Medien:	farbige Grafiken
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren und beweisen (K 1); Probleme mathematisch lösen (K 2); mathematische Darstellungen verwenden (K 4); mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K 5); mathematisch kommunizieren (K 6)

Grafisches Integrieren – Lernzirkel zur Analysis

Vorbemerkungen

Fachwissenschaftliche Einordnung

Bei der Kurvendiskussion (Kurvenuntersuchung) liefern die drei Ableitungen einer Funktion Kriterien für notwendige und hinreichende Bedingungen zum Bestimmen markanter Punkte des Funktionsgraphen (Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkt) und werden zur Verlaufsbestimmung des Graphen (Monotonie, Krümmungsverhalten) angewendet. Somit kann grob der Verlauf einer Funktion gezeichnet werden.

Die Ableitung einer Funktion ist zum anderen wieder eine Funktion. Da sie auch die Änderungsrate des durch die Funktion beschriebenen Prozesses darstellt, wird sie zu Betrachtungen von Veränderungen in der Wirtschaft, Biologie, Medizin, Physik und anderen Bereichen eingesetzt.

So ist in der Physik die (erste) Ableitung des Weges nach der Zeit die Momentangeschwindigkeit, d. h. $v(t) = \dot{s}(t)$. In der Wirtschaft ist die Grenzkostenfunktion $K_G(x) = K'(x)$ die (erste) Ableitung der Gesamtkostenfunktion $K(x)$. Bei Wachstums- oder Zerfallsprozessen ist die erste Ableitung die Wachstums- bzw. Zerfallsgeschwindigkeit der Wachstums- bzw. Zerfallsgröße.

Nicht immer ist jedoch der analytische Ausdruck der betrachteten Funktionsgröße gegeben, sondern man kennt nur den Graphen. Zumindest der Graph der Ableitungsfunktion – zum Bestimmen der momentanen Änderungsrate – kann aber zeichnerisch gewonnen werden.

Neben der Differenzialrechnung ist die Integralrechnung ein wichtiges Teilgebiet der Analysis. Sie ist aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnung entstanden. Integrieren einer Funktion bedeutet Bilden einer Stammfunktion zu dieser Funktion und entspricht der Umkehrung des Ableitens; aus diesem Grund wird dieser Vorgang auch

„Aufleiten“ genannt. Es ist also eine Funktion F zu bestimmen, deren Änderungsfunktion f bekannt ist, wobei $F' = f$ gilt.

Diese Stammfunktion F stellt dann die Bestandsfunktion des betrachteten Prozesses mit der Änderungsrate f dar.

Auch hier ist nicht immer der analytische Ausdruck der Änderungsfunktion f gegeben, sondern ggf. nur deren Graph, aus dem der Graph der zugehörigen Bestandsfunktion F zeichnerisch bestimmt werden kann. Diese zeichnerische Darstellung der Bestandsfunktion über den groben Verlauf derselben wird als „grafisches Integrieren“ bezeichnet.

Methodisch-didaktische Hinweise

Die Schüler besitzen bereits Kenntnisse aus der Differenzial- und Integralrechnung sowie ihrer Anwendung beim Lösen mathematischer Probleme (Kurvendiskussion, Optimierungsaufgaben, Flächen- und Volumenberechnung, Fertigkeiten beim grafischen Differenzieren).

Die Unterrichtseinheit ist für etwa sechs Unterrichtsstunden vorgesehen. Den Schwerpunkt der Einheit bildet das grafische Integrieren, wobei der Graph einer Stammfunktion F mit Kenntnis der Zusammenhänge zwischen der Ausgangsfunktion f und der Stammfunktion zeichnerisch gewonnen wird.

In der ersten Doppelstunde wird dazu bereits Bekanntes aus der Differenzial- und Integralrechnung sowie die Zusammenhänge zwischen dem Graphen einer Funktion f und dem Graphen ihrer ersten Ableitungsfunktion f' , wiederholt. Dieses Wissen wird anschließend übertragen auf die Zusammenhänge zwischen dem Graphen einer Funktion f und dem Graphen ihrer Stammfunktion F . Im zweiten Teil dieser Doppelstunde erfolgt mithilfe von entsprechenden Abbildungen die Erläuterung des grafischen Integrierens. Zur besseren Veranschaulichung der grafischen Zusammenhänge stehen Ihnen die dabei verwendeten Abbildungen auch farbig im Online-Archiv zur Verfügung.

Zur Übung und Festigung erfolgt die Bearbeitung entsprechender Aufgaben in Gruppenarbeit in Form eines Lernzirkels, der aus den vier Stationen besteht und von jeder Lerngruppe zu durchlaufen ist. Die Schüler arbeiten in Kleingruppen von maximal drei bis vier Schülern.

Jede Station besteht aus zwei Aufgaben: Bei Aufgabe 1 ist jeweils der Graph der Stammfunktion F (Bestandsfunktion des betrachteten Prozesses) aus dem Graphen der Ausgangsfunktion f (Änderungsfunktion) entsprechend der erarbeiteten Vorgehensweise grob zu skizzieren. Die Lösung der Aufgabe 2 erfordert das Überprüfen und Begründen von Aussagen über die Zusammenhänge zwischen dem Graphen einer Funktion f und dem Graphen ihrer Stammfunktion F .

Der Lernzirkel sieht vor, dass jede Station von jeder Kleingruppe in je einer Unterrichtsstunde durchlaufen wird; je nach Leistungsstärke der Schüler kann diese Zeit verkürzt werden. Aufgaben, die nicht geschafft werden, sind zu Hause fertigzustellen. Mithilfe von Tippkarten werden Hinweise und Tipps zum Lösen jeder Aufgabe gegeben. Diese stellen Lösungshinweise dar, ohne dass die Lösung vorweggenommen wird. Die Schüler können hier nachlesen, wenn sie nicht wissen, wie sie mit der Lösung einer Aufgabe beginnen sollen. Zu manchen Aufgaben gibt es mehrere Hinweise und Tipps. Die Schüler sollen hier nach dem Lesen eines Tipps nochmals nachdenken, ob sie nun einen Lösungsweg finden, bevor sie den nächsten Tipp lesen. Ausführliche Lösungen der Aufgaben liegen am Lehrertisch aus, sodass die Schüler ihre Ergebnisse nach Beendigung einer Station überprüfen können.

Voraussetzungen:

- Ableitung und Ableitungsfunktion
- Bedeutung der Ableitung als Tangentensteigung und als Änderungsrate
- Kenntnis über markante Punkte eines Funktionsgraphen: Nullstellen, Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkte
- Bedingungen für Extrem- und Wendepunkte
- Verlaufsbeschreibung eines Funktionsgraphen: Monotonie, Krümmung, Vorzeichenwechsel
- Integrieren als Umkehrung des Differenzierens
- Stammfunktion, unbestimmtes und bestimmtes Integral
- Geometrische Interpretation der Fläche unter dem Graphen einer Funktion
- Zusammenhang zwischen Änderungs- und Bestandsfunktion

1. Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und den Graphen ihrer Ableitungs- und Stammfunktion

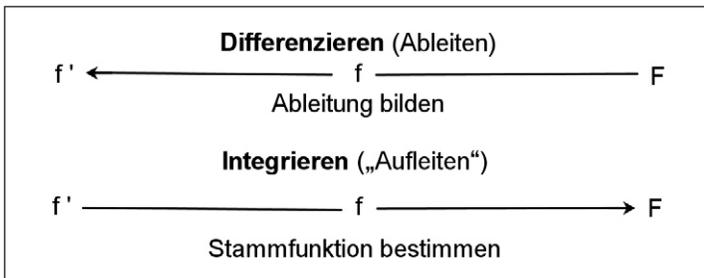
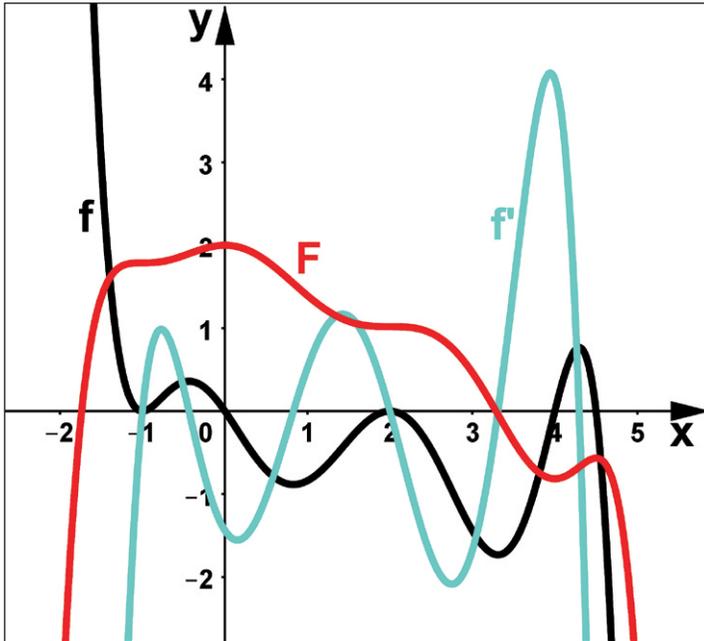


Abb. 1

f' ist die erste Ableitung von f und f ist die erste Ableitung von F .
 F ist eine Stammfunktion zu f und f ist eine Stammfunktion zu f' .



SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus: *Grafisches Integrieren*

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

