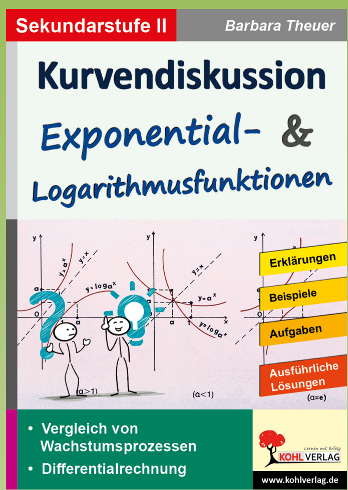
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Kurvendiskussion / Exponential- & Logarithmusfunktionen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Inhalt

Vorwort

Wachstums- und Zerfallsprozesse in Natur und Gesellschaft zu beschreiben und durch Modellieren berechenbar zu machen, gehört zu den bedeutsamen Aufgaben der Naturwissenschaften und der Mathematik. Kapital wächst, wenn es nach dem Zinseszins-Prinzip angelegt wird. In diesem Fall arbeitet die Zeit für das Vermögen des Anlegers, wie der britische Gelehrte Richard Price im Jahr 1772 mit seinem Beispiel vom „Josephspfennig", der zu Christi Geburt mit einem Cent angelegt wurde und wegen des Zuwachses auf Grund der Verzinsung mit fünf Prozent bis zur Gegenwart auf einen nahezu unbeschreiblich hohen Betrag – beispielsweise bis zum Jahr 2000 auf $2{,}39 \cdot 10^{40}$ Euro – angewachsen ist. Auch die Legende von dem Lohn für den Erfinder des Schachspiels – einer unsagbar hohen Menge an Weizenkörnern – ist ein beeindruckendes Beispiel für Wachstumsprozesse, die erst schleichend verlaufen, um mit zunehmender Zeit jedoch den Startwert zu enormer Größe anwachsen zu lassen.

Mit Hilfe von Exponentialfunktionen lassen sich Wachstumsvorgänge beschreiben und berechnen, die in der Natur – auch vom Menschen unerkannt – ablaufen. So vermehren sich beispielweise Algen, Bakterien und Hefekulturen exponentiell; der Luftdruck nimmt mit steigender Höhe über dem Meeresspiegel exponentiell ab. Die Konzentration von Medikamenten im Blut verringert sich mit zunehmender Zeit seit Beginn der Einnahme exponentiell, sowie auch die Konzentration von Alkohol, was bei Verkehrskontrollen oft zu erschreckendem Resultat führt, da auch Stunden nach dem Genuss immer noch Restalkohol nachweisbar ist.

So werden in vorliegendem Heft die Exponentialfunktionen anschaulich mit Beispielen aus der Praxis eingeführt und ihre Eigenschaften mit denen linearer Funktionen und den Eigenschaften von Potenzfunktionen verglichen. Fachübergreifende Betrachtungen zur Physik und zur Biologie bereichern dabei die mathematischen Inhalte.

Im Anschluss an die elementaren Betrachtungen und Arbeitsaufträgen zu den Exponentialfunktionen kommt die Anwendung der Differentialrechnung auf diesen Funktionstyp zum Einsatz. Im ersten Band dieser Serie wurde die Bedeutung des Differentialquotienten bzw. der ersten Ableitung einer Funktion für den Anstieg einer Funktion an einer bestimmten Stelle am Beispiel von Potenzfunktionen ausführlich vorgestellt.

Beim Differenzieren von Exponentialfunktionen kommt der Euler'schen Zahl e und Exponentialfunktionen mit der Basis e eine besondere Bedeutung zu, denn die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x) = e^x$ ist mit der Funktion selbst identisch.

Die zahlreichen Arbeitsaufträge, Übungen und Tests in diesem Heft sollen ein Beitrag dazu sein, die Schüler zum Entdecken und Festigen der Eigenschaften von Exponential- und Logarithmusfunktionen anzuregen und die Bedeutung dieser Funktionen für die mathematische Beschreibung praktischer Sachverhalte zu erkennen.

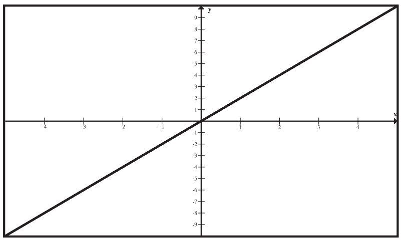
Viel Freude und Erfolg beim Einsatz der vorliegenden Kopiervorlagen wünschen Ihnen der Kohl-Verlag und

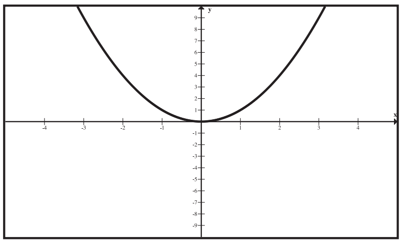
Barbara Theuer

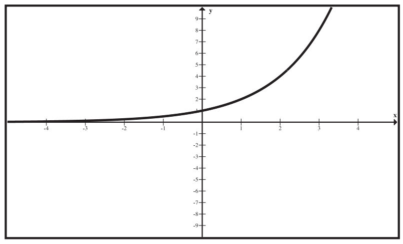
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg
Kurvendiskussion / Exponential- & Logarithmusfunktionen - Bestell-Nr. P11 854

1 Funktionen bauen

Aufgabe 1: *Welche Funktionsterme lassen sich mit den Bausteinen „Zahl 2“ und „Variable x“ mittels Multiplikation auf verschiedenen Stufen zusammensetzen? Ordne die Funktionsterme den abgebildeten Graphen zu.*







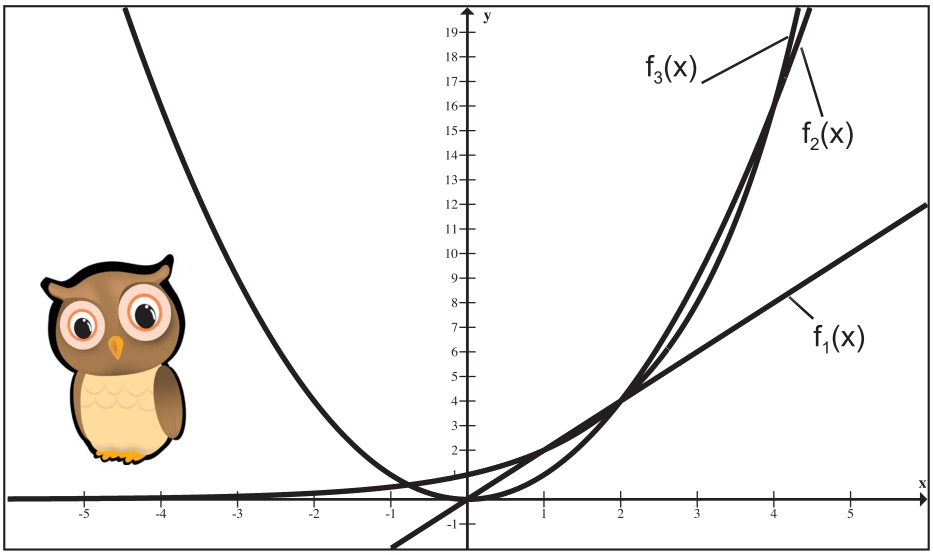
A f(x) = ____________________ **B** f(x) = ____________________ **C** f(x) = ____________________

Aufgabe 2: ***a)*** *Zeichne in untenstehender Abbildung die Funktionsgraphen farbig nach und gib die zugehörigen Funktionsgleichungen an.*

$f_1(x)$ = ________________ $f_2(x)$ = ________________ $f_3(x)$ = ________________

b) *Welche dieser drei Funktionen beschreibt (ab einem bestimmten x-Wert) das stärkere Wachstum des Funktionswertes y?*

____



Aufgabe 3: ***a)*** *Ab welchem positiven x-Wert sind die Funktionswerte der Funktion $f_2(x)$ größer als die Funktionswerte der Funktion $f_1(x)$? Berechne den x-Wert exakt.*

____

b) *Ab welchem positiven x-Wert haben die Funktionswerte der Funktion $f_3(x)$ die Funktionswerte der Funktion $f_2(x)$ für alle größeren x-Werte eingeholt? Mache einen Ansatz und ermittle das Ergebnis als groben Näherungswert sowohl durch Probieren als auch graphisch.*

____

____

Kurvendiskussion / Exponential- & Logarithmusfunktionen - Bestell-Nr. P11 854
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

2 Überholen bei Funktionen

Der listige Schachfuchs

Um die Wartezeit vor Beginn eines Schachturniers zu überbrücken, schlägt Spieler A seinem Partner B folgenden Deal vor:

„Lege auf das erste Feld auf meiner Seite des Schachbrettes einen Cent. Auf das zweite Feld legst du zwei Cent, auf das dritte Feld vier Cent, auf das vierte Feld acht Cent usw. – das heißt, du musst den Betrag von Feld zu Feld verdoppeln; aber es sind ja nur lumpige Cent. Wenn der Turm von Münzen zu hoch wird, kann du die Cent gegen Zehn-Cent-Münzen oder Zwanzig-Cent-Münzen tauschen. Den lumpigen Betrag auf den zweiunddreißig Feldern meiner Seite des Schachspieles bekomme ich. Du bekommst den stattlichen Betrag auf deiner Seite des Schachspieles, den ich wie folgt auffülle:

Ich lege auf das erste Feld einen Euro, was immerhin einhundert Cent sind, auf das zweite Feld zwei Euro mehr – also dreihundert Cent, auf das dritte Feld zwei Euro mehr als auf das zweite Feld und so fahre ich fort, indem ich auf jedes der folgenden Felder zwei Euro mehr als auf das vorhergehende Feld lege bis ich auf dem zweiunddreißigsten Feld deiner Seite angekommen bin.“

Aufgabe 1: *a) Schätze, welcher der beiden Spieler das bessere Geschäft macht.*

____

b) Wie viele Cent-Stücke muss Spieler B auf das fünfte Feld des Schachbretts legen? Gib allgemein eine Funktion $f_B(n)$ für den Betrag in Cent an, wenn n die Nummer des Feldes des Schachbrettes ist, welches Spieler B nach oben angegebener Regel mit Cent bestückt. Beschreibe auch den Definitionsbereich. Wie viele Cent muss Spieler B auf das 32. Feld legen?

Auf dem fünften Feld liegen __________ Münzen.

Funktion: $f_B(n)$ = ______________, Definitionsbereich: ____________________

c) Wie viele Euro-Münzen muss Spieler A auf das fünfte Feld des Schachbretts legen? Gib allgemein eine Funktion $f_A(n)$ für den Betrag in Cent an, wenn n die Nummer des Feldes des Schachbrettes ist, welches Spieler A nach oben angegebener Regel mit Euro-Münzen bestückt. Mache auch eine Aussage über den Definitionsbereich. Wie viele Euro muss Spieler A auf dem 32. Feld türmen?

Auf dem fünften Feld liegen __________ Münzen.

Funktion: $f_A(n)$ = ______________, Definitionsbereich: ____________________

Aufgabe 2: *Ab dem wievielten Feld des Schachbrettes wird es für Spieler B, der zunächst triumphiert hat, gefährlich?*
Stelle sowohl die Beträge auf den von Spieler A und Spieler B mit Münzen belegten Feldern als auch die Summen der Beträge auf allen 32 Feldern jeder Seite in einer Tabelle (siehe Seite 7) übersichtlich zusammen. Vergleiche das Wachstumsverhalten der auf beiden Seiten des Schachbrettes angehäuften Münzen.

2 Überholen bei Funktionen

Zu Aufgabe 2:

Feld Nummer	Beträge in Cent			
	Spieler B zahlt		Spieler A zahlt	
n	Anzahl der Münzen auf dem n-ten Feld $f_B(n) = 1 \cdot 2^{n-1}$	Summe aller Münzen $f_B(n)$ auf den ersten n Feldern	Anzahl der Münzen auf dem n-ten Feld $f_A(n) = 100 \cdot (2n - 1)$	Summe aller Münzen $f_A(n)$ auf den ersten n Feldern
1				
2				

Antwort :

____

____

Aufgabe 3: **– Zugabe für Mathefüchse:**

Gib je eine Summenformel für die Anzahl der von beiden Spielern aufzulegenden Münzen durch Belegung von n Feldern nach den oben angegebenen Vorschriften an. Berechne mit diesen Formeln, wie viel Cent beide Spieler jeweils – zumindest theoretisch – bis zur vollständigen Belegung von 32 Feldern anhäufen würden.

____

Kurvendiskussion / Exponential- & Logarithmusfunktionen - Bestell-Nr. P11 854
KOHL VERLAG

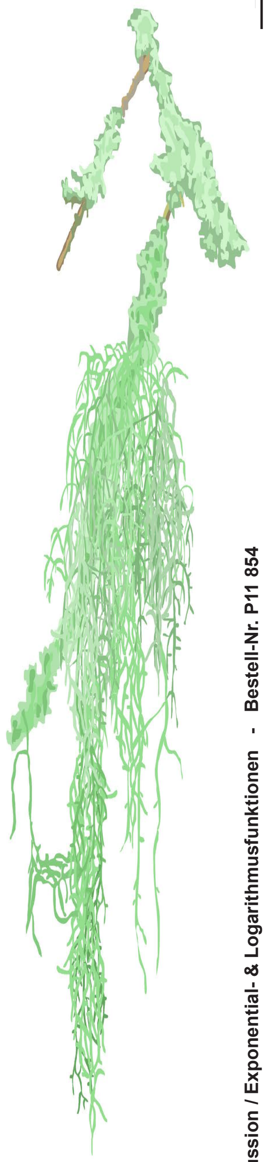
2 Überholen bei Funktionen

Algen im Baggersee

In einer Flussniederung wird Kies ausgebaggert. Ein anfangs 800 m^2 großer Teich vergrößert sich durch die Baggerarbeiten jede Woche um 550 m^2. Da der See später als Wassersportfläche genutzt werden soll, wird die Wasserqualität regelmäßig untersucht. Besonders genau wird eine Algenart beobachtet, die sich sehr schnell vermehrt. Die von den grünen Algen bedeckte Fläche ist zu Beginn der Baggerarbeiten 1 m^2 groß und verdoppelt sich jede Woche.

Ein Umweltforscher behauptet: „Bald ist der ganze See grün.“ Bei den Beamten der Kommunalverwaltung erntet er nur ungläubiges Kopfschütteln. Wer hat recht?

Aufgabe 4: *Nach wie vielen Wochen ist die ganze Wasserfläche von den Algen bedeckt?*



a) *Stelle je eine Funktion für das Wachstum der Oberfläche des Baggersees f_B (t) und der mit Algen bedeckten Fläche f_A (t) in Abhängigkeit von der Zeit auf.*

____

____

b) *Schreibe eine Gleichung als Lösungsansatz auf. Warum lässt sich die Gleichung nicht mit elementaren Umformungen lösen?*

____

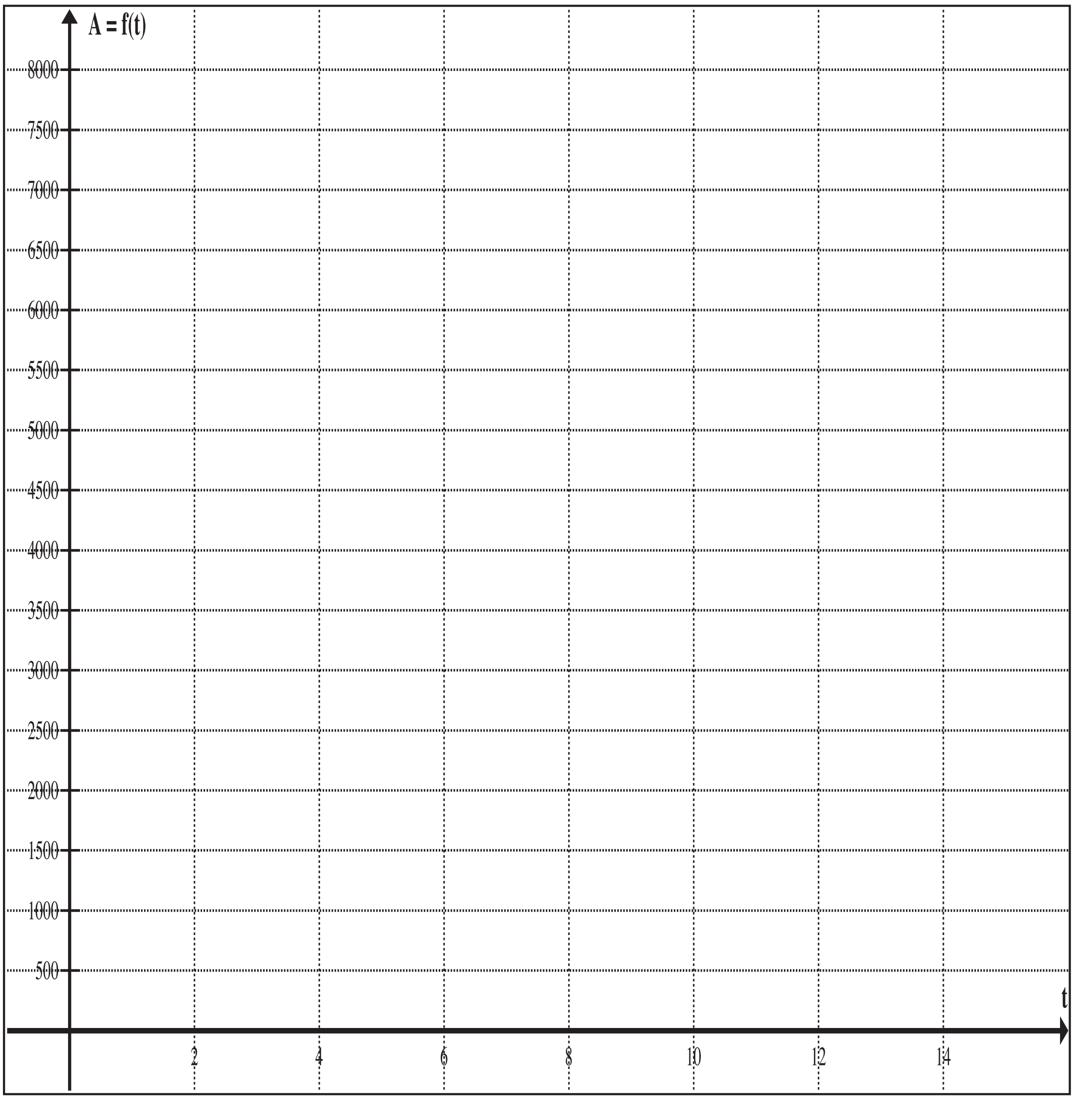
____

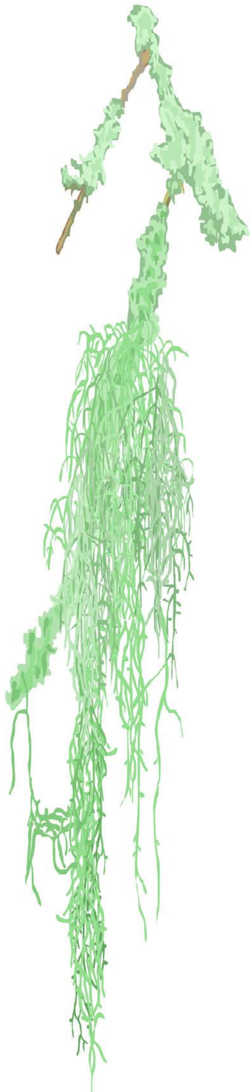
c) *Löse diese Aufgabe näherungsweise durch systematisches Probieren. (Tabelle).*

Zeit in Wochen	Größe des Baggersees in m^2	Größe der mit Algen bedeckten Fläche in m^2
0 (Beobachtungsbeginn)		
1		
2		
3		
...		

2 Überholen bei Funktionen

d) *Stelle die Wachstumsfunktionen (siehe Aufgabenteil a) in einem Koordinatensystem dar und lies einen Näherungswert für die Lösung ab. Vergleiche die graphische Lösung mit der Lösung, welche du mit Hilfe der Tabellen ermittelt hast.*



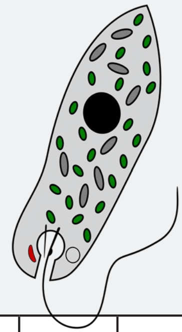


e) *Ermittle durch eine exakte Berechnung die Zeit, nach welcher die Algen eine Fläche von 10 000 m² (20 000 m², 40 000 m²) bei unbegrenzter Größe des Sees einnehmen würden.*
Notiere den Rechenweg und gib das Ergebnis auf Hundertstel genau an.

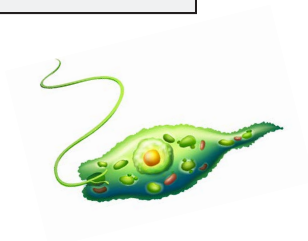
3 Exponentialfunktionen beschreiben Wachstums- und Zerfallsprozesse

Wachstum

Das Augentierchen Euglena lebt in grün verfärbten Tümpeln und ernährt sich durch Photosynthese. Mit Hilfe einer Geißel peitscht es sich im Wasser voran. Euglena erkennt Lichteinfall. Sein rotes namensgebende Auge ist mit einem Photorezeptor verbunden, der es dem Einzeller ermöglicht, sich in Abhängigkeit von der Lichtrichtung zu bewegen (phototaxis). Das Wachstum einer Euglena-Population wurde über einen Zeitraum von 8 Tagen tabellarisch erfasst.



t: Tage seit Beobachtungsbeginn	0	1	2	3	4	5	6	7
n: Anzahl der Augentierchen pro ml	200	320	520	810	1300	2100	3320	5250



Aufgabe 1:

a) *Berechne die Differenzen der Bestände jeweils aufeinander folgender Tage. Was stellst du fest?*

___

___

___

b) *Berechne die Quotienten der Bestände aufeinanderfolgender Tage. Formuliere deine Erkenntnis. Um wie viel Prozent wächst die Population täglich?*

___

___

___

___

c) *Formuliere eine rekursive Darstellung n(t+1) in Abhängigkeit von n(t).*

___

d) *Wie lautet die Wachstumsfunktion n(t)?*

___

e) *Welcher Bestand liegt angenähert nach 20 Tagen vor?*

___

___

Bildnachweise

Seite 5, 15, 23: © meen_na - Fotolia.com;
Seite 6: © Oleksandr Delyk; chillim; Deanora - Fotolia.com;
Seite 6, 7: © Style-o-Mat - Fotolia.com;
Seite 8, 9: © Gennadij Kurilin - Fotolia.com; © Unclesam - Fotolia.com;
Seite 8, 9, 11: © julien tromeur - Fotolia.com;
Seite 10: Euglena - © Shazz - wikimedia.org;
Seite 10, 11: © Africa Studio - Fotolia.com; © blueringmedia - Fotolia.com;
Seite 12, 13; 54, 58: clipart.com;
Seite 13: © valentint - Fotolia.com
Seite 14, 16, 25, 30, 35, 36, 41-43, 46, 47-50, 52, 82; © Steve Young - Fotolia.com;
Seite 15, 26, 42, 45, 50: © Steve Young - Fotolia.com.jpg
Seite 17, 28, 42, 50: © Rada Covalenco - Fotolia.com.jpg
Seite 18, 34, 54: © hultimus - Fotolia.com;
Seite 18, 27, 44, 55: © wegener17 - Fotolia.com;
Seite 19, 32: © Steve Young - Fotolia.com;
Seite 20, 21: © okalinichenko - Fotolia.com;
Seite 21: © Piotr Pawinski - Fotolia.com;
Seite 21, 22, 24, 28, 29, 35, 36, 37, 39, 41: © meen_na - Fotolia.com;
Seite 22: © interphase1; Oleksandr Delyk; electriceye; pablographics;
Piotr Pawinski - Fotolia.com;
Seite 22, 23: © Vladislav Kochelaevs - Fotolia.com;
Seite 23: © M. Schuppich - Fotolia.com;
Seite 25, 26, 41, 52: © Steve Young - Fotolia.com;
Seite 26, 43, 51, 57: © ILYA AKINSHIN - Fotolia.com;
Seite 27, 44: © julien tromeur - Fotolia.com;
Seite 29: © macrovector; CG; Edler von Rabenstein - Fotolia.com;
Seite 29, 33, 53: © Steve Young - Fotolia.com;
Seite 30, 32, 38, 40, 43, 51, 57, 58: © Piumadaquila - Fotolia.com;
Seite 31: hultimus - Fotolia.com;
Seite 33: © nupsik284; wegener17 - Fotolia.com;
Seite 33, 40: © Christos Georghiou - Fotolia.com;
Seite 34: © barneyboogles - Fotolia.com;
Seite 35: © socris79 - Fotolia.com;
Seite 35, 56: © fotomek - Fotolia.com;
Seite 35, 36: hultimus - Fotolia.com;
Seite 37: orensila - Fotolia.com;
Seite 38, 39, 49, 58: © Christos Georghiou - Fotolia.com;
Seite 39: © Gabriele Rohde - Fotolia.com;
Seite 40, 55: © koya979 - Fotolia.com;
Seite 42, 50: © fabioberti.it - Fotolia.com;
Seite 43, 56: © Thodoris Tibilis - Fotolia.com;
Seite 46, 47, 82: © Marek - Fotolia.com;
Seite 48: © multik79 - Fotolia.com;
Seite 51: © hultimus - Fotolia.com;
Seite 54: © JiSign; brookhouse - Fotolia.com;
Seite 55: dule964 - Fotolia.com;
Seite 56: © istidesign - Fotolia.com;
Seite 57: Histogramme_loi_normale - © Romary - commons.wikimedia.org

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Kurvendiskussion / Exponential- & Logarithmusfunktionen

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de]