



SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Ich kann's begründen! Argumentieren – was ist das eigentlich?

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Reihe 11 S 1	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	---------	----------	-----	---------	----------

Ich kann's begründen! – Mathematisch argumentieren am Beispiel der binomischen Formeln

Tobias Jaschke, Uhingen



Nicht nur Detektive brauchen stichhaltige Beweise. Auch in der Mathematik spielt das Begründen mit Beispielen und das Beweisen mathematischer Sätze eine wichtige Rolle.

Bilder: 1. Thinkstock; 2+3: Julia Lenzmann

I/F

Klasse: 8
Dauer: 4–10 Stunden, je nach Materialauswahl
Inhalt: bildliches, algebraisches und kontextorientiertes Begründen, über Beispiele argumentieren, Termumformungen, binomische Formeln
Ihr Plus: alternative Arbeitsblätter zur Differenzierung (CD-ROM 68), Raster zum Erstellen eigener Memoblätter (M 11 und M 12), Checkliste zur Selbsteinschätzung (CD-ROM 68)

Warum ist das so? Dies fragen vor allem kleine Kinder.

In diesem Beitrag setzen sich Ihre Schüler mit verschiedenen Möglichkeiten auseinander, Aussagen zu begründen – mit Beispielen, mit grafischen Überlegungen und auch mit Termumformungen. Sie entdecken Fehler in Rechnungen und werden schließlich an einfache mathematische Beweise herangeführt. Eine Lernerfolgskontrolle rundet die Unterrichtseinheit ab.

Didaktisch-methodische Hinweise

Argumentieren – was ist das eigentlich?

Argumentieren ist der Versuch, eine andere Person oder sich selbst von einer Annahme, einem Lösungsweg, einer Erläuterung oder einer Vermutung zu überzeugen. Je mehr dabei die vorgebrachten Argumente stimmig und nachvollziehbar und je mehr sie an den Kriterien der Rationalität festzumachen sind, desto überzeugender sind sie. Im schulisch-mathematischen Rahmen bedeutet dies, dass eine Argumentation dann als schlüssig und überzeugend anerkannt wird, wenn sie in ihrer allgemeinen Gültigkeit klar wird und sich bei den Lernenden die Erkenntnis einstellt, dass weitere Beispiele und Diskussionen keine neuen Erkenntnisse bringen werden.

Argumentieren im Mathematikunterricht – Vorbehalte und Chancen

Nach den Vorstellungen der Kultusministerkonferenz (KMK) sollen Argumentationsprozesse immanenter Bestandteil des Mathematikunterrichts sein. Und natürlich ist Argumentieren im Mathematikunterricht nichts gänzlich Neues. Schon immer wurden die Lernenden im Zuge von Lernprozessen aufgefordert, ihre Meinung zu vertreten und schlüssige Gründe für ihre Aussagen anzugeben. Neu ist, dass diese Argumentationsprozesse explizit als inhaltsübergreifende Kompetenzen formuliert sind und daher bei der Unterrichtsplanung bewusst mit bedacht werden müssen. Sie werden dadurch wesentlich verbindlicher und verlangen von uns Mathematiklehrern eine tiefer gehende Durchdringung mathematischer Inhalte.

„Beweisen, das können meine Schüler nicht!“. Vielleicht liegt diese weitverbreitete Ansicht unter Lehrkräften in den Vorstellungen begründet, die viele vom Begründen und Beweisen aus der eigenen Schul- und Studienzeit in den Lehrberuf mitbringen. Oft herrscht noch der Eindruck vor: je abstrakter die Beweisführung, desto hochwertiger die Argumentation. Die kommunikativen, modellierenden und argumentativen Prozesse, die im Vorfeld einer formalisierten Mathematik an der Tagesordnung sind, spielen in der Lehrerausbildung kaum eine Rolle. Mathematik wird – vor allem an Universitäten – noch immer primär vermittelt als eine fertige und abstrakt-logische Wissenschaft, die man dann beherrscht, wenn man in der Lage ist, mit den innermathematischen Formalismen sicher und überzeugend umzugehen. Nicht-formale Beweise oder Begründungen werden in der wissenschaftlichen Ausbildung eher als dilettantisch oder naiv abgetan.

Diese Ansicht entspricht allerdings nicht einem schülergemäßen Begründen und Argumentieren. Denn im schulischen Kontext ist das Argumentieren die Grundlage des Verstehens, das dadurch initiiert wird, immer wieder nach dem Warum zu fragen. Wenn man die Lernenden dazu ermutigen will – und das sollten wir wirklich tun, damit Mathematik nicht auf ein stupides Algorithmisieren reduziert wird –, benötigen diese das mathematische Rüstzeug, um darauf zu antworten. Wie dieses Rüstzeug aussehen kann, dazu macht diese Unterrichtseinheit Vorschläge.

Im Mathematikunterricht spielen nicht nur die formalen Beweise der Fachwissenschaft eine wichtige Rolle. Es ist vielmehr wichtig, die grundlegenden Denkprinzipien und Begründungsstrategien zu lernen und zu verstehen sowie unterschiedliche Argumentationsarten zu akzeptieren und zu fördern. Die Schüler sollen lernen, dass die Suche nach geeigneten grafischen Darstellungen (bildliche Argumentation), nach Beispielen und Gegenbeispielen oder nach passenden Situationen (kontextorientierte Argumentation) sowie die Verwendung von Variablen (algebraische Argumentation) hilfreiche Argumentationsstrategien sind. Dazu müssen diese Beweisformen aber regelmäßig im Unterricht vorkommen und es muss über die Aussagekraft und die dahinterstehenden Prinzipien reflektiert werden.

Reihe 11 S 3	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	---------	----------	-----	---------	----------

Zum Argumentieren auffordern – eine neue Aufgabenkultur

Schüler glauben ihrer Lehrerin oder ihrem Lehrer – besonders im Fach Mathematik – erfahrungsgemäß fast alles. Der Wunsch nach rationaler Stimmigkeit muss erst provoziert werden. So muss man den Lernenden verdeutlichen, dass aus *einem* richtigen Beispiel noch keine allgemeine Gültigkeit abgeleitet werden kann oder dass das Finden eines Gegenbeispiels ausreicht, um Behauptungen zu widerlegen. Auch Strategien, wie durch geeignete Visualisierungen oder durch die Verwendung von Variablen Verallgemeinerungen zu erzielen sind, müssen im Mathematikunterricht erst erlernt werden.

Diese Begründungstätigkeiten kann man bereits in der Aufgabenstellung mitdenken und die Lernenden so zur Reflexion auffordern. Hier einige Beispiele: „Begründe dein Vorgehen“, „Widerlege diese Behauptung durch ein Gegenbeispiel“, „Überprüfe, ob ...“, „Veranschauliche diesen Zusammenhang durch eine geeignete Zeichnung“ oder „Gilt das immer? Überprüfe, indem du Variablen verwendest“.

Schritt für Schritt – die Beweisstrategien im Überblick

Da die Lernenden in dieser Einheit das Argumentieren anhand der binomischen Formeln lernen, sollten sie diese bereits kennen und elementare algebraische Umformungen beherrschen. Es werden jedoch auch andere Terme sowie geometrische Zusammenhänge als Beispiele verwendet, um die Übertragbarkeit der Argumentationsstrategien zu zeigen. Sie können die Materialien hintereinander als Einheit einsetzen oder – da das Thema Argumentieren ein recht großes und komplexes ist – auch losgelöst voneinander, je nachdem, welchen Schwerpunkt Sie setzen möchten.

Die vorliegenden Materialien versuchen, zunächst eine alltagsnahe und eher fachunspezifische Sensibilisierung für die Notwendigkeit des Begründens zu erzeugen. Dies erfolgt über die Betrachtung von alltäglichen Begründungssituationen (**M 1**). Erst im Anschluss werden grundlegende mathematische Beweisprinzipien vorgestellt: Die Schüler lernen das **Begründen durch Beispiele und Gegenbeispiele (M 2 und M 3)** und üben sich im **Überprüfen von Rechnungen** sowie in der **Fehlersuche (M 4)**. Sie arbeiten mit **ikonischen Begründungen (M 5–M 7)** und machen sich mit dem **algebraischen Argumentieren (M 8 und M 9)** vertraut. Die neuen Beweisstrategien wollen trainiert werden: Eine Lernerfolgskontrolle bietet **M 10**. Ein besonderes Augenmerk gilt den **Memoblättern (M 11 und M 12)**. Diese werden – nicht wie sonst üblich – fertig mitgeliefert, sondern im Zuge der Erarbeitung von den Lernenden selbst erstellt. Die Schüler halten das Wichtigste in ihrer eigenen Sprache und in der für sie nötigen Ausführlichkeit fest. So prägt sich das Gelernte nachhaltig ein.

Machbar für alle – Angebote zur Differenzierung

Das komplexe Thema des Argumentierens erfordert ein Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus, da es gerade im Bereich der Vorstellungskraft und des Abstrahierens große Kompetenzunterschiede gibt. Damit die Grundlagen trotzdem für jeden Einzelnen erlernbar sind, bieten wir Ihnen auf der **CD-ROM 68** zu den Materialien **M 6, M 7** und **M 10** jeweils ein alternatives Arbeitsblatt für schwächere Lernende sowie Tippkarten zu **M 2**. Eine **Checkliste zur Selbsteinschätzung** macht Stärken und Schwächen in der Beherrschung der Inhalte deutlich und fordert zum weiteren Üben auf.

Ausblick – Argumentieren als fester Bestandteil des Unterrichts

Die hier vorgestellten Argumentationsstrategien lassen sich prinzipiell auf alle anderen Inhalte der Schulmathematik übertragen. Ziel sollte sein, im Unterricht eine Lernkultur des Warum-Fragens zu entwickeln. Wenn die Schüler lernen, nicht einfach alles als gegeben anzunehmen und stattdessen Dinge zu hinterfragen, werden sie mündig und das Begründungsbedürfnis entsteht automatisch. Sicher ist es bis dahin ein weiter Weg, aber wir sollten uns immer wieder auf diesen begeben.

Reihe 11 S 4	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Auf einen Blick

Inner- versus außermathematisches Argumentieren

Material	Thema	Stunde
M 1 (Sw-Fo)	Warm-up – was heißt „begründen“ eigentlich? Einstieg mit Beispielen für das Begründen im Alltag und in der Mathematik	1.

Möglichkeiten und Grenzen des Begründens mit Beispielen

Material	Thema	Stunde
M 2 (Ab)	Aussagen bestätigen oder widerlegen Mithilfe von Beispielen Aussagen bestätigen oder widerlegen	2.
M 3 (Ab)	Aufgepasst! – Nicht immer genügt ein Beispiel Vermutungen beweisen / widerlegen; Aussagen auf ihre Allgemeingültigkeit überprüfen	3.
M 4 (Ab)	Wo steckt der Fehler? – Ergebnisse überprüfen In Rechnungen Fehler finden; Klammern ausmultiplizieren	4.

Ikonisches und algebraisches Begründen

Material	Thema	Stunde
M 5 (Ab)	Wie kann ich mir das vorstellen? – Variablen und Terme veranschaulichen Variable durch Streckenlängen veranschaulichen	5.
M 6 (Ab)	Das wird ja ein Rechteck! – Terme multiplizieren Das Produkt aus zwei Termen als Rechteck veranschaulichen	
M 7 (Ab)	Gar nicht so schwierig! – Die 1. binomische Formel grafisch begründen Sich die 1. binomische Formel grafisch veranschaulichen	6.
M 8 (Ab)	Für alle Zahlen gleichzeitig – mit Variablen begründen Einfache mathematische Beweise nachvollziehen	7.
M 9 (Ab)	Mach dich fit! – Begründen mit Variablen und Termen Aussagen mathematisch begründen mit Variablen und Termen	8.

Die Beweisstrategien festigen und Zusatzmaterial

Material	Thema	Stunde
M 10 (LEK)	Teste dich selbst! Den Lernerfolg überprüfen	9.
M 11/M 12 (Ab)	Das merk ich mir! – Mein Memoblatt 1 und 2 Die Merkregeln übersichtlich auf den Memoblättern festhalten	

Reihe 11	Verlauf	Material S 1	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	----------------	------------------------	------------	----------------	-----------------

M 1 Warm-up – was heißt „begründen“ eigentlich?

Wir brauchen stichhaltige Beweise!

Beweis mir das erst mal!

Ich konnte ihn vom Gegenteil überzeugen.

Überzeuge dich selbst, überzeuge deinen Freund, überzeuge deinen Feind!

Was bedeuten die Zitate? Worum geht es hier?

I/F

Im Zweifel für den Angeklagten!

Bilder: 1–3: Thinkstock; 4: colourbox

Was meint ihr zu dieser Aussage? Ist sie richtig oder falsch?

Smartphones auf dem Vormarsch:

Immer mehr Deutsche nutzen mittlerweile Smartphones als Kombination aus Handy und Internet. Nach einer Studie von STATISTA besitzt aktuell bereits jeder zweite Deutsche ein Smartphone.

Welche Gleichung passt zur Zeitungsmeldung? Warum?

- a) $D + S = 2$ b) $2 \cdot S = D$ c) $D - 2 = S$ d) $D = \frac{1}{2} S$

Lösungen und ■ Tipps zum Einsatz

M 1 Warm-up – was heißt „begründen“ eigentlich?

Inner- versus außermathematisches Begründen

■ Material **M 1** sensibilisiert die Lernenden für den Unterschied zwischen außermathematischem und innermathematischem Argumentieren. Die in der Mathematik übliche Kategorisierung in *richtig* und *falsch* funktioniert im Alltag nicht ohne Weiteres. **Außermathematische Argumentationsprozesse** sind oft geprägt von **Subjektivität**, und es gibt meist Aspekte, die dafür-, und Aspekte, die dagegensprechen. Dies arbeiten Sie in den Schritten 1–3 heraus. **Innermathematische Argumentationen** dagegen berufen sich auf **mathematische Gesetze, Verfahren** oder **Definitionen** und sind immer gültig. Sie hängen nicht von Meinungen oder Umständen ab (Schritt 4).

Schritt für Schritt – so setzen Sie das Material ein

Kopieren Sie das Material auf **Folie** und decken Sie die einzelnen Elemente nach und nach auf. Beispiellösungen zu den einzelnen Fragen finden Sie im Lösungsteil auf der folgenden Seite.

1. Decken Sie die **Zitate** auf. Die Lernenden erklären sie und erkennen, dass man beim Begründen und Beweisen möglichst so stichhaltige und nachvollziehbare Argumente vorbringen muss, dass sich andere Personen davon überzeugen lassen – sogar der größte Feind.
2. Sammeln Sie **Situationen aus dem Alltag**, in denen man Menschen überzeugen muss:

Im Alltag müssen wir immer mal wieder andere Personen oder uns selbst von einer Idee oder Meinung überzeugen. Fallen euch Situationen ein?

3. Decken Sie den **Richtergrundsatz** auf:

Was meint ihr zu diesem Grundsatz? Ist er richtig oder falsch? Kann man das eindeutig sagen? Was ist, wenn der Angeklagte tatsächlich a) schuldig oder b) unschuldig ist?

Hier soll herausgearbeitet werden, dass man bei vielen Dingen im Alltag nicht eindeutig sagen kann, ob sie richtig oder falsch sind. Es kommt auf die Umstände oder die Sichtweise an.

4. Die **Zeitungsmeldung** erfordert nun eine innermathematische Argumentation. Richtig ist b), denn die Anzahl der Deutschen ist zweimal so hoch wie die Anzahl der Smartphones (weil ja nur jeder zweite Deutsche ein Smartphone besitzt). Fragen Sie die Lernenden zunächst, für was die Variablen D und S stehen könnten. Wichtig ist hier zu erkennen, dass D und S für die Anzahl der Deutschen bzw. Smartphones stehen. D ist also nicht *ein* Deutscher und S nicht *ein* Smartphone, sondern die Menge aller Deutschen bzw. Smartphones.
5. Nun sichern die Lernenden ihre Erkenntnisse auf dem **Memoblatt 1 (M 11)**. Fragen Sie:
 - a) Wann ist eine Begründung gut? Wann ist sie schlecht?
 - b) Worin unterscheiden sich mathematische Begründungen (siehe Zeitungsmeldung) von anderen?

Überlegt zu zweit und überträgt eure Erkenntnisse auf das Memoblatt 1.



SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Ich kann's begründen! Argumentieren – was ist das eigentlich?

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

