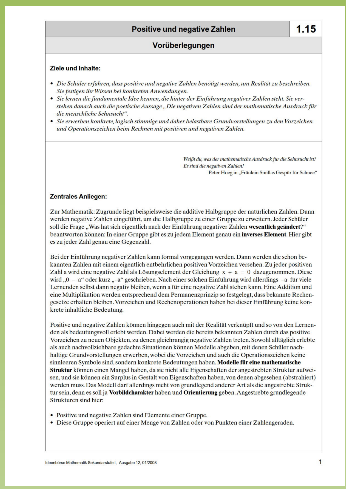
Auszug aus:

Positive und negative Zahlen



Positive und negative Zahlen | **1.15**

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler erfahren, dass positive und negative Zahlen benötigt werden, um Realität zu beschreiben. Sie festigen ihr Wissen bei konkreten Anwendungen.*
- *Sie lernen die fundamentale Idee kennen, die hinter der Einführung negativer Zahlen steht. Sie verstehen danach auch die poetische Aussage „Die negativen Zahlen sind der mathematische Ausdruck für die menschliche Sehnsucht".*
- *Sie erwerben konkrete, logisch stimmige und daher belastbare Grundvorstellungen zu den Vorzeichen und Operationszeichen beim Rechnen mit positiven und negativen Zahlen.*

Weißt du, was der mathematische Ausdruck für die Sehnsucht ist?
Es sind die negativen Zahlen!
Peter Hoeg in „Fräulein Smillas Gespür für Schnee"

Zentrales Anliegen:

Zur Mathematik: Zugrunde liegt beispielsweise die additive Halbgruppe der natürlichen Zahlen. Dann werden negative Zahlen eingeführt, um die Halbgruppe zu einer Gruppe zu erweitern. Jeder Schüler soll die Frage „Was hat sich eigentlich nach der Einführung negativer Zahlen **wesentlich geändert**?" beantworten können: In einer Gruppe gibt es zu jedem Element genau ein **inverses Element**. Hier gibt es zu jeder Zahl genau eine Gegenzahl.

Bei der Einführung negativer Zahlen kann formal vorgegangen werden. Dann werden die schon bekannten Zahlen mit einem eigentlich entbehrlichen positiven Vorzeichen versehen. Zu jeder positiven Zahl a wird eine negative Zahl als Lösungselement der Gleichung $x + a = 0$ dazugenommen. Diese wird „$0 - a$" oder kurz „$-a$" geschrieben. Nach einer solchen Einführung wird allerdings $-a$ für viele Lernenden selbst dann negativ bleiben, wenn a für eine negative Zahl stehen kann. Eine Addition und eine Multiplikation werden entsprechend dem Permanenzprinzip so festgelegt, dass bekannte Rechengesetze erhalten bleiben. Vorzeichen und Rechenoperationen haben bei dieser Einführung keine konkrete inhaltliche Bedeutung.

Positive und negative Zahlen können hingegen auch mit der Realität verknüpft und so von den Lernenden als bedeutungsvoll erlebt werden. Dabei werden die bereits bekannten Zahlen durch das positive Vorzeichen zu neuen Objekten, zu denen gleichrangig negative Zahlen treten. Sowohl alltäglich erlebte als auch nachvollziehbare gedachte Situationen können Modelle abgeben, mit denen Schüler nachhaltige Grundvorstellungen erwerben, wobei die Vorzeichen und auch die Operationszeichen keine sinnleeren Symbole sind, sondern konkrete Bedeutungen haben. **Modelle für eine mathematische Struktur** können einen Mangel haben, da sie nicht alle Eigenschaften der angestrebten Struktur aufweisen, und sie können ein Surplus in Gestalt von Eigenschaften haben, von denen abgesehen (abstrahiert) werden muss. Das Modell darf allerdings nicht von grundlegend anderer Art als die angestrebte Struktur sein, denn es soll ja **Vorbildcharakter** haben und **Orientierung** geben. Angestrebte grundlegende Strukturen sind hier:

- Positive und negative Zahlen sind Elemente einer Gruppe.
- Diese Gruppe operiert auf einer Menge von Zahlen oder von Punkten einer Zahlengeraden.

Ideenbörse Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe 12, 01/2008 1

Positive und negative Zahlen

1.15

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler erfahren, dass positive und negative Zahlen benötigt werden, um Realität zu beschreiben. Sie festigen ihr Wissen bei konkreten Anwendungen.*
- *Sie lernen die fundamentale Idee kennen, die hinter der Einführung negativer Zahlen steht. Sie verstehen danach auch die poetische Aussage „Die negativen Zahlen sind der mathematische Ausdruck für die menschliche Sehnsucht“.*
- *Sie erwerben konkrete, logisch stimmige und daher belastbare Grundvorstellungen zu den Vorzeichen und Operationszeichen beim Rechnen mit positiven und negativen Zahlen.*

Weißt du, was der mathematische Ausdruck für die Sehnsucht ist?
Es sind die negativen Zahlen!
Peter Hoeg in „Fräulein Smillas Gespür für Schnee“

Zentrales Anliegen:

Zur Mathematik: Zugrunde liegt beispielsweise die additive Halbgruppe der natürlichen Zahlen. Dann werden negative Zahlen eingeführt, um die Halbgruppe zu einer Gruppe zu erweitern. Jeder Schüler soll die Frage „Was hat sich eigentlich nach der Einführung negativer Zahlen **wesentlich geändert**?“ beantworten können: In einer Gruppe gibt es zu jedem Element genau ein **inverses Element**. Hier gibt es zu jeder Zahl genau eine Gegenzahl.

Bei der Einführung negativer Zahlen kann formal vorgegangen werden. Dann werden die schon bekannten Zahlen mit einem eigentlich entbehrlichen positiven Vorzeichen versehen. Zu jeder positiven Zahl a wird eine negative Zahl als Lösungselement der Gleichung $x + a = 0$ dazugenommen. Diese wird „$0 - a$“ oder kurz „$-a$“ geschrieben. Nach einer solchen Einführung wird allerdings $-a$ für viele Lernenden selbst dann negativ bleiben, wenn a für eine negative Zahl stehen kann. Eine Addition und eine Multiplikation werden entsprechend dem Permanenzprinzip so festgelegt, dass bekannte Rechengesetze erhalten bleiben. Vorzeichen und Rechenoperationen haben bei dieser Einführung keine konkrete inhaltliche Bedeutung.

Positive und negative Zahlen können hingegen auch mit der Realität verknüpft und so von den Lernenden als bedeutungsvoll erlebt werden. Dabei werden die bereits bekannten Zahlen durch das positive Vorzeichen zu neuen Objekten, zu denen gleichrangig negative Zahlen treten. Sowohl alltäglich erlebte als auch nachvollziehbare gedachte Situationen können Modelle abgeben, mit denen Schüler nachhaltige Grundvorstellungen erwerben, wobei die Vorzeichen und auch die Operationszeichen keine sinnleeren Symbole sind, sondern konkrete Bedeutungen haben. **Modelle für eine mathematische Struktur** können einen Mangel haben, da sie nicht alle Eigenschaften der angestrebten Struktur aufweisen, und sie können ein Surplus in Gestalt von Eigenschaften haben, von denen abgesehen (abstrahiert) werden muss. Das Modell darf allerdings nicht von grundlegend anderer Art als die angestrebte Struktur sein, denn es soll ja **Vorbildcharakter** haben und **Orientierung** geben. Angestrebte grundlegende Strukturen sind hier:

- Positive und negative Zahlen sind Elemente einer Gruppe.
- Diese Gruppe operiert auf einer Menge von Zahlen oder von Punkten einer Zahlengeraden.

1.15	Positive und negative Zahlen

Vorüberlegungen

Für das Ziel der Erweiterung einer Halbgruppe ist es wesentlich, dass die Addition eine **assoziative innere Verknüpfung** auf einer Menge von Zahlen ist.

Wir betrachten eine im Unterricht bewährte Grundsituation: Herr Härle hat ein Konto. Der Kontostand ist ausgeglichen. Dieser **Zustand** wird durch die Zahl 0 charakterisiert. Frau Bauer ist Bankangestellte. Sie betreut das Konto. Sie nimmt eine Gutschrift von 100 € vor. Diese **Handlung** (dieser **Vorgang**) wird durch die Zahl +100 beschrieben. Auf dem Konto ist danach ein Guthaben von 100 €. Dieser *Zustand* wird auch durch die Zahl +100 beschrieben. Danach nimmt Frau Bauer eine Lastschrift von 300 € vor. Dieser *Handlung* (diesem Vorgang) wird die negative Zahl –300 zugeordnet. Danach ist das Konto mit 200 € im Soll – es hat den durch –200 € erfassten *Zustand*. Die beiden hintereinander ausgeführten Vorgänge können gleichwertig durch eine Lastschrift von 200 € ersetzt werden – dann werden *zwei Vorgänge verknüpft*, um durch einen gleichwertigen Vorgang ersetzt zu werden. Diese Verknüpfung kann Addition genannt werden, denn es handelt sich um eine innere Verknüpfung auf der Menge der Vorgänge.
Da jeder Vorgang einen Zustand des Kontos in einen anderen überführt, bewirkt er eine Abbildung der Menge der Zustände des Kontos auf sich. Selbstverständlich müssen **Vorgänge und Zustände streng unterschieden** werden. Der strukturelle (mathematische) Unterschied ist auch von der beschriebenen Realität her bedeutsam: Es ist kein geringer Unterschied, ob jemand 500 € Schulden hat oder 500 € Schulden macht. Es ist durchaus nicht gleichgültig, ob alte Schulden oder nur die Neuverschuldung reduziert und sogar auf „Null gefahren“ werden. Mathematikunterricht muss nicht zuletzt Verantwortung dafür übernehmen, dass Schüler befähigt werden, zum Beispiel Aussagen von Politikern und Journalisten angemessen zu bewerten.

Zahlen sind geordnet. Die Menge der Zustände eines Kontos ist ebenfalls geordnet und die sie erfassenden Zahlen können auf einer Zahlengeraden angegeben werden, die nach beiden Seiten unbegrenzt gedacht wird. An ihr wird deutlich, dass –200 kleiner als 0 ist. Dies entspricht der Erfahrung, dass 200 € Schulden-Haben weniger Besitz als ein ausgeglichenes Konto ist. Damit begegnet **Leonard Euler** dem bei der Einführung negativer Zahlen hinderlichen Vorurteil, dass keine Zahl kleiner als 0 sein könne. Eine Menge von positiven und negativen Zahlen ist geordnet. Die Menge der möglichen Zustände eines Kontos hat diese eine Eigenschaft. Auch eine nach beiden Seiten unbegrenzt gedachte Celsiusskala hat diese Eigenschaft. Beide sind Modelle für eine **geordnete Menge** positiver und negativer Zahlen – nicht mehr, aber auch nicht weniger.

Zahlen haben aber weitere unverzichtbare Eigenschaften. Vor allem soll mit Zahlen gerechnet werden. Im Besonderen wollen wir positive und negative Zahlen addieren. Die Addition ist eine **innere Verknüpfung** auf der Menge der zugrunde liegenden Zahlen, das bedeutet, dass jedem geordneten Paar von Zahlen eine Zahl zugewiesen wird. Dabei sind die drei Zahlen von gleicher Art. Würde die erste einen Vorgang, die zweite einen Zustand und die dritte einen Zustand beschreiben, dann hätten wir es nicht mit einer inneren, sondern mit einer äußeren Verknüpfung zu tun. Dies wäre ein Gegenmodell für die gewünschte Addition!

Frau Bauer nimmt eine Gutschrift von 100 € und danach eine Lastschrift von 300 € vor. Um den gleichen Kontostand zu erreichen, hätte sie beide Handlungen durch eine einzige gleichwertig ersetzen können – sie hätte dann eine Lastschrift von 200 € vornehmen müssen. Diese einfache Überlegung wird durch $(+100) + (-300) = -200$ erfasst. Hier steht die Addition für die Verkettung (das Hintereinanderausführen) von zwei Vorgängen (Handlungen). Die Vorgänge sind Abbildungen der Menge der Zustände auf sich. Das Verketten (Hintereinanderausführen) von Abbildungen ist stets assoziativ. Eine Gutschrift oder Lastschrift bewirkt auf der Zahlengeraden eine Verschiebung. Dem Verketten von Vorgängen entspricht das Hintereinanderausführen von Verschiebungen der Zahlengeraden in sich.

Vorüberlegungen

Eine geometrische Gruppe von Verschiebungen der Zahlengeraden auf sich gibt ein zum obigen „Kontomodell“ isomorphes geometrisches Modell für eine additive Gruppe positiver und negativer Zahlen.

Nach dieser Einführung der Addition können wir die Situation auch anders deuten: Auf der durch Zahlen beschriebenen geordneten Menge der Zustände eines Kontos operiert die additive Gruppe der Vorgänge. Der Zustand –100 € kann dadurch erreicht werden, dass von einem leeren Konto 100 € abgebucht werden. Statt vom durch –100 € erfassten Zustand auszugehen und auf diesen den durch –300 erfassten Vorgang wirken zu lassen, wird dann von dem durch –100 € erfassten Vorgang ausgegangen und dieser wird mit dem durch –300 beschriebenen Vorgang verkettet. Offensichtlich kann das Bild des Zustands –100 € bei der durch die Lastschrift von 300 € bewirkten Abbildung durch die Addition $-100 + (-300) = -400$ ermittelt werden. Die Pfeildarstellung

$$-100 \xrightarrow{+(-300)} (-100) + (-300) = -400$$

beschreibt dies eindrucksvoll, denn sie trennt Zustände (Urbild und Bild) optisch vom Vorgang (der Abbildungsvorschrift). Diese Darstellung bewährt sich bei der praktischen Lösung vieler Aufgaben. Überdies wird hier der gravierende Unterschied zwischen Schuldenhaben und Schuldenmachen unmissverständlich ausgedrückt. Deshalb ist es angemessen, erst nach der Einführung die verkürzte Darstellung

$$-100 \xrightarrow{-300} -100 - 300 = -400$$

heranzuziehen.

In unserer realen Welt gibt es neben reversiblen auch irreversible Vorgänge bzw. Handlungen. Werden konkrete Handlungen zu gedachten Handlungen, kann auch zu einer irreversiblen Handlung die sie aufhebende Gegenhandlung gedacht werden. Nach Piaget ist es ein entscheidender Schritt in der Entwicklung menschlichen Denkens, dass konkrete Handlungen zu gedachten reversiblen Handlungen (Piaget nennt sie Operationen) werden. Wenigstens in Gedanken erfüllt sich die Sehnsucht nach einer Welt, in der jeder Schaden geheilt werden kann – Menschen können sich nach einer Welt sehnen, in der jede böse oder schlimme Handlung durch eine Gegenhandlung und jeder üble, schädliche oder unangenehme Vorgang durch einen Gegenvorgang aufgehoben werden können. Diese Vorstellung entspricht der **fundamentalen Idee** bei der Erweiterung einer additiven Halbgruppe zu einer additiven Gruppe:

Zu jeder Zahl a gibt es die Gegenzahl $-a$ mit $a + (-a) = 0$.

„Hans verliert 1000 €.“ beschreibt einen Vorgang, zu dem Hans den Gegenvorgang „Hans findet 1000 €.“ vermutlich nur mit Wehmut denken kann. Jeder dieser Vorgänge hebt den jeweils anderen auf, wenn beide hintereinander ablaufen. Kein geringerer als **Carl Friedrich Gauß** bemerkt hierzu 1831: *„Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, das mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleichzustellen ist.“*

Die Modelle, welche Lernende zuerst erfahren, sollen unbedingt eine logisch unanfechtbare Grundvorstellung liefern, an denen sie sich nachhaltig orientieren können. Beispielsweise kann $(+6) + (-6) = 0$ für folgenden Sachverhalt stehen: „Wir betrachten einen Körper. Wird seine Temperatur um 6 Grad erhöht und danach um 6 Grad erniedrigt, dann hat sich die Temperatur des Körpers insgesamt nicht verändert, denn beide Vorgänge heben sich gegenseitig auf (vernichten sich). Dies ist eine innere Verknüpfung auf der Menge der Zahlen, welche Temperaturänderungen beschreiben. Allerdings ist dieses Modell nur uneingeschränkt geeignet, wenn die Temperatur sowohl nach oben als auch nach unten unbegrenzt gedacht wird. Nun wird aber keine Temperatur unterhalb des absoluten Nullpunktes gemessen.

1.15 Positive und negative Zahlen

Vorüberlegungen

(+3) + (–2) beschreibt bei jeder Ausgangstemperatur eine Erwärmung um 1 Grad. Dagegen ist (–2) + (+3) nur für Ausgangstemperaturen realisierbar, die mindestens 2 Grad oberhalb des absoluten Nullpunktes liegen. In diesem Modell ist die Addition also nicht kommutativ. Nur scharf denkende Schüler werden diesen Mangel wahrnehmen. Das sollte lobend herausgestellt werden, denn schließlich müssen alle Schüler erfahren, dass reale Modelle gelegentlich idealisiert gedacht werden, damit sie alle gewünschten Eigenschaften haben. Dass die Temperaturskala unbegrenzt gedacht wird, mag noch angehen. Wie soll aber folgender Versuch einer einführenden und damit vorrangig im Gedächtnis der Lernenden sich einprägenden Interpretation der Summe (+6) + (–6) = 0 bewertet werden: „Die Temperatur beträgt +6 °C. Es kühlt um 6 Grad ab. Danach hat es +0 °C.“ Die erste Zahl (+6) beschreibt einen Zustand, die zweite Zahl (–6) eine Änderung und die dritte Zahl 0 beschreibt einen Zustand. (Die alte Schreibweise der Physiker hebt den Unterschied zwischen einem Zustand wie 21 ° (Grad Celsius) und einer Zustandsänderung wie 15 grd (Grad) hervor. Die heutigen Angaben in K (Kelvin) für beides tun das nicht.) Diese Verknüpfung ist keine innere Verknüpfung und sie ist auch nicht assoziativ: Einerseits ist [(+6) + (–6)] + (+9) = 0 + (+9) = +9. Dabei ist 0 ein Zustand, der mit dem Vorgang (+9) verknüpft wird. Es ergibt sich der durch +9 erfasste Zustand. Andererseits ist (+6) + [(–6) + (+9)] = (+6) + (+3) = ? Nun soll ein Zustand (+6) mit einem Zustand (+3) verknüpft werden. Dies leistet die beschriebene Verknüpfung nicht.

Eine Abkühlung um 6 Grad bewirkt eine Abbildung der Menge der Temperaturzustände auf sich. (+6) + (–6) = 0 kann mithilfe eines Pfeildiagramms veranschaulicht werden:

$+6\,°\mathrm{C} \xrightarrow{-6\ \mathrm{Grad}} 0\,°\mathrm{C}.$

Dass der Endzustand durch die Addition (+6) + (–6) berechenbar ist, ergibt sich, wenn wir nicht vom Zustand +6 °C, sondern von einem Körper der Temperatur 0 °C ausgehen und diesen zuerst um 6 Grad erwärmen. Die additive Gruppe der Änderungen der Temperatur operiert also auf der Menge der Temperaturzustände.

In einem Raum befinden sich mehrere Menschen. Wie soll die folgende immer wieder außerhalb eines seriösen Mathematikunterrichts vorgeschlagene Deutung von (+3) + (–5) + (+2) = 0 bewertet werden: „Wenn 3 Personen in einem Raum sind und 5 Personen den Raum verlassen, dann müssen 2 Personen hereinkommen, damit sich im Raum keine Person aufhält?“ Dies ist nicht launig, sondern unerträglicher Unsinn. Natürlich gibt es eine angemessene Interpretation, die alltäglicher Erfahrung nicht widerspricht: „Wenn in einen Raum 3 Personen hineingehen, anschließend 5 Personen hinausgehen und danach 2 Personen hineingehen, dann hat sich insgesamt die Anzahl der Personen im Raum nicht verändert.“ Übrigens kann auch festgestellt werden, dass zu Beginn mindestens 2 Personen im Raum waren.

Ein Problem für sich ist die Multiplikation positiver und negativer Zahlen. Gelegentlich wird behauptet, hier sei keine inhaltliche Vorstellung möglich. Zahlen können Verschiebungen auf der Zahlengeraden beschreiben. Das Hintereinanderausführen führt zur Addition. Zahlen sind auch geeignet, als Streckungsfaktoren zentrische Streckungen mit festem Zentrum zu erfassen. Beim Hintereinanderausführen solcher zentrischen Streckungen werden die Streckungsfaktoren multipliziert. Die identische Abbildung hat den Streckungsfaktor +1. Wird die zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor (–1) als Drehung um 180° interpretiert, dann können (+1) · (+1) = (–1) · (–1) = +1 und (+1) · (–1) = (–1) · (+1) = –1 nicht länger verwechselt werden. Übrigens ist so auch die Erweiterung zu den komplexen Zahlen samt deren Multiplikation anschaulich angenehm möglich; die imaginäre Einheit i beschreibt eine Drehung um 90° und i · i = –1 ist nichts Geheimnisvolles, sondern ist offensichtlich.

Vorüberlegungen

Einordnung:

Den Schülern sollen bei der Einführung negativer Zahlen konkrete Modelle vorgestellt werden, die geeignet sind, nachhaltig logisch stimmige Grundvorstellungen zu den Vorzeichen und den Operationszeichen aufzubauen.

Hierzu werden Arbeitsblätter vorgelegt, welche bei der Einführung positiver und negativer Zahlen von Nutzen sein möchten.

Natürlich gibt es auch Arbeitsblätter, um das Rechnen mit ganzen Zahlen zu üben. Unverzichtbar sind vor allem Arbeitsblätter, in denen positive und negative Zahlen bei konkreten Aufgaben zur Anwendung kommen. Ausführliche Lösungsangaben ermöglichen selbstständiges Arbeiten der Schüler.

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Positive und negative Zahlen können nützlich sein
2. Schritt: Zahl und Gegenzahl
3. Schritt: Addition und Subtraktion
4. Schritt: Zur Multiplikation
5. Schritt: Vereinfachung der Schreibweise
6. Schritt: Rechengesetze
7. Schritt: Einige Anwendungen

Unterrichtsplanung

1. Schritt: Positive und negative Zahlen können nützlich sein

Wir beginnen mit einer Situation, die problemlos zum Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen zur Addition positiver und negativer Zahlen geeignet ist. Es schließen sich weitere Beispiele an, die als Modelle für die Addition positiver und negativer Zahlen dienen können.
(**Arbeitsblätter** siehe **M1 bis M3**, **Lösungen** siehe **M4 und M5**)

2. Schritt: Zahl und Gegenzahl

Zu Handlungen kann es Gegenhandlungen, zu Vorgängen kann es Gegenvorgänge geben oder es können solche wenigstens gedacht werden. Entsprechend gibt es sowohl zu jeder positiven als auch zu jeder negativen Zahl jeweils die Gegenzahl.
(**Arbeitsblatt** siehe **M6**, **Lösungen** siehe **M7**)

3. Schritt: Addition und Subtraktion

Die Addition einer Zahl wird durch eine folgende Subtraktion dieser Zahl aufgehoben. Eine Handlung kann durch die Gegenhandlung aufgehoben werden. Offensichtlich kann eine Subtraktion durch die Addition einer Gegenzahl ersetzt werden. Addition und Subtraktion sollen auch eingeübt werden. Dabei soll jeder Schüler jeweils ganz für sich entscheiden, ob ihm eine Kopfrechnung genügt oder ob er ein schriftliches Verfahren heranziehen sollte.
(**Arbeitsblätter** siehe **M8 und M9**, **Lösungen** siehe **M10 und M11**)

4. Schritt: Zur Multiplikation

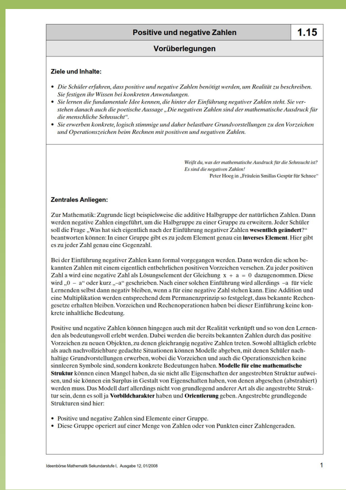
Die multiplikative Halbgruppe der ganzen Zahlen kann auf der Menge der ganzen Zahlen operieren. Dies kann durchaus zur Beschreibung alltäglicher Situationen herangezogen werden.
(**Arbeitsblätter** siehe **M12 und M13**, **Lösungen** siehe **M14**)

5. Schritt: Vereinfachung der Schreibweise

Nachdem positive und negative Zahlen bekannt sind, können verkürzte Schreibweisen beim praktischen Rechnen eingesetzt werden.
(**Arbeitsblatt** siehe **M15**, **Lösungen** siehe **M16**)

6. Schritt: Rechengesetze

Es wird an Rechengesetze erinnert. Überdies kann festgestellt werden, dass nach der Einführung negativer Zahlen die Subtraktion entbehrlich ist. So wird verständlich, dass bei der Definition eines



Positive und negative Zahlen	1.15
Vorüberlegungen	

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler erfahren, dass positive und negative Zahlen benötigt werden, um Realität zu beschreiben. Sie festigen ihr Wissen bei konkreten Anwendungen.*
- *Sie lernen die fundamentale Idee kennen, die hinter der Einführung negativer Zahlen steht. Sie verstehen danach auch die poetische Aussage „Die negativen Zahlen sind der mathematische Ausdruck für die menschliche Sehnsucht".*
- *Sie erwerben konkrete, logisch stimmige und daher belastbare Grundvorstellungen zu den Vorzeichen und Operationszeichen beim Rechnen mit positiven und negativen Zahlen.*

Weißt du, was der mathematische Ausdruck für die Sehnsucht ist?
Es sind die negativen Zahlen!
Peter Hoeg in „Fräulein Smillas Gespür für Schnee"

Zentrales Anliegen:

Zur Mathematik: Zugrunde liegt beispielsweise die additive Halbgruppe der natürlichen Zahlen. Dann werden negative Zahlen eingeführt, um die Halbgruppe zu einer Gruppe zu erweitern. Jeder Schüler soll die Frage „Was hat sich eigentlich nach der Einführung negativer Zahlen **wesentlich geändert**?" beantworten können: In einer Gruppe gibt es zu jedem Element genau ein **inverses Element**. Hier gibt es zu jeder Zahl genau eine Gegenzahl.

Bei der Einführung negativer Zahlen kann formal vorgegangen werden. Dann werden die schon bekannten Zahlen mit einem eigentlich entbehrlichen positiven Vorzeichen versehen. Zu jeder positiven Zahl a wird eine negative Zahl als Lösungselement der Gleichung $x + a = 0$ dazugenommen. Diese wird „$0 - a$" oder kurz „$-a$" geschrieben. Nach einer solchen Einführung wird allerdings $-a$ für viele Lernenden selbst dann negativ bleiben, wenn a für eine negative Zahl stehen kann. Eine Addition und eine Multiplikation werden entsprechend dem Permanenzprinzip so festgelegt, dass bekannte Rechengesetze erhalten bleiben. Vorzeichen und Rechenoperationen haben bei dieser Einführung keine konkrete inhaltliche Bedeutung.

Positive und negative Zahlen können hingegen auch mit der Realität verknüpft und so von den Lernenden als bedeutungsvoll erlebt werden. Dabei werden die bereits bekannten Zahlen durch das positive Vorzeichen zu neuen Objekten, zu denen gleichrangig negative Zahlen treten. Sowohl alltäglich erlebte als auch nachvollziehbare gedachte Situationen können Modelle abgeben, mit denen Schüler nachhaltige Grundvorstellungen erwerben, wobei die Vorzeichen und auch die Operationszeichen keine sinnleeren Symbole sind, sondern konkrete Bedeutungen haben. **Modelle für eine mathematische Struktur** können einen Mangel haben, da sie nicht alle Eigenschaften der angestrebten Struktur aufweisen, und sie können ein Surplus in Gestalt von Eigenschaften haben, von denen abgesehen (abstrahiert) werden muss. Das Modell darf allerdings nicht von grundlegend anderer Art als die angestrebte Struktur sein, denn es soll ja **Vorbildcharakter** haben und **Orientierung** geben. Angestrebte grundlegende Strukturen sind hier:

- Positive und negative Zahlen sind Elemente einer Gruppe.
- Diese Gruppe operiert auf einer Menge von Zahlen oder von Punkten einer Zahlengeraden.

Ideenbörse Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe 12, 01/2008 1