Auszug aus:

Die Binomialverteilung und deren Anwendung

Wiederholung: Zufallsexperiment, Ergebnismenge und Ereignis

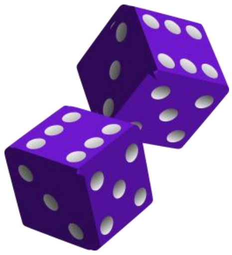
Bevor wir in die Stochastik der Oberstufe einsteigen, wiederholen wir zunächst die drei elementarsten Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zufallsexperiment

Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment mit folgenden Eigenschaften:

- Das Experiment kann unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholt werden.
- Alle möglichen Ergebnisse sind eindeutig festgelegt.
- Es gibt mindestens zwei mögliche Ergebnisse.

Standardbeispiel: Werfen zweier Würfel



Dieses Zufallsexperiment, auf das wir uns im Folgenden immer wieder beziehen werden, besteht aus dem Werfen zweier handelsüblicher Würfel (= idealer Würfel). Es werden die beiden Augenzahlen betrachtet und diese addiert. Dieser Wert ist das Ergebnis des Zufallsexperiments.

Die Ergebnismenge Ω beinhaltet alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments.

Ω in unserem Standardbeispiel:

$\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

Anmerkung:

Würde man lediglich die Augenzahlen der beiden Würfel betrachten und sie nicht addieren, wäre die Ergebnismenge

$$\Omega = \{11; 12; \ldots; 16; 21; 22; \ldots; 26; \ldots; 61; 62; \ldots; 66\}.$$

Im Fach Mathematik, gerade in der Stochastik, gilt die Devise: Aufgabenstellung genau lesen!

Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge.
Ereignisse werden in der Regel mit Großbuchstaben bezeichnet.

Beispiele von Ereignissen in unserem Standardbeispiel:

A = Augensumme ist gerade = $\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

(wird nun z. B. die Augensumme 8 gewürfelt, sagt man, das Ereignis A ist eingetreten.)

B = Augensumme ist eine Primzahl = $\{2; 3; 5; 7; 11\}$

C = Augensumme ist kleiner als 20 = Ω

D = Augensumme beträgt 1 = $\{\,\}$

Anmerkung:

Besteht eine Ergebnismenge aus n Elementen, gibt es $\mathbf{2^n}$ Ereignisse. In unserem Standardbeispiel gäbe es also $2^{11} = 2048$ verschiedene Ereignisse. Dazu gehören auch die „primitiven“ Ereignisse Ω (gesamte Ergebnismenge) und $\{\,\}$ (leere Menge), die es bei jedem Zufallsexperiment gibt.

Weitere Fragestellungen zu unserem Standardbeispiel:

1. Prüfe, ob die Wahrscheinlichkeit aller Augensummen gleich groß ist.
2. Ermittle, welche Augensumme die größte Wahrscheinlichkeit besitzt.

Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse 1 beträgt, ergibt sich für die Gewinnchance für 10 €

$$1 - \frac{125}{216} - \frac{25}{72} - \frac{1}{216} = \frac{5}{72} \approx 6{,}9\ \%$$

Nun haben wir zu dem Wert der Zufallsvariable X die zugehörige Wahrscheinlichkeit berechnet. Fassen wir unsere Ergebnisse in einer Wertetabelle zusammen:

x_i	-5	5	10	15
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216} \approx 57{,}9\ \%$	$\frac{25}{72} \approx 34{,}7\ \%$	$\frac{5}{72} \approx 6{,}9\ \%$	$\frac{1}{216} \approx 0{,}46\ \%$

(x_i steht hier für den konkreten Wert der Zufallsvariable X)

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Funktion, die jedem Wert x_i der Zufallsvariable X die zugehörige

Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zuordnet, heißt

Die obige Wertetabelle gibt also die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X für das Spiel „Chuck a luck“ an.

Anzahl der Bücher	Anordnungsmöglichkeiten
1	1
2	2
3	6

Jetzt kommt zu guter Letzt noch das Geschichtsbuch hinzu. Beginnen wir die Anordnung gleich mit diesem an erster Position, ergeben sich für diesen Fall (siehe Tabelle) sechs Möglichkeiten die anderen drei Bücher auf die Positionen zwei, drei und vier zu verteilen. Ebenso ergeben sich sechs Möglichkeiten mit den anderen Büchern an jeweils erster Position, insgesamt also $4 \cdot 6 = 24$ Möglichkeiten.

Anzahl der Bücher	Anordnungsmöglichkeiten
1	1
2	2
3	6
4	24

Würden wir nun zusätzlich ein fünftes Buch hinzufügen, gäbe es $5 \cdot 24 = 120$ Möglichkeiten.

Entsprechend dieses Prinzips können wir nun folgende verallgemeinerte Aussage treffen:

Für n Objekte gibt es

$$\boldsymbol{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

unterschiedliche Möglichkeiten (Permutationen), diese anzuordnen

Bei der Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, 45 Gegenstände auf unterschiedliche Weise anzuordnen, wäre es mühselig und zeitaufwendig, das Produkt $45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot \ldots \cdot 1$ in den Taschenrechner einzugeben. Aus diesem Grund besitzen die meisten Taschenrechner die Fakultät-Taste, welche mit dem Symbol $n!$ beschriftet ist.