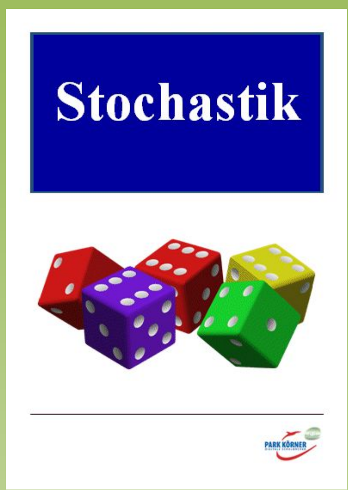

Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Wiederholung: Zufallsexperiment, Ergebnismenge und Ereignis

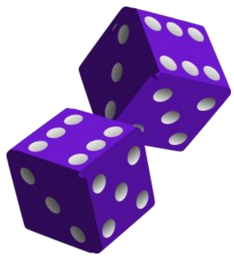
Bevor wir in die Stochastik der Oberstufe einsteigen, wiederholen wir zunächst die drei elementarsten Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zufallsexperiment

Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment mit folgenden Eigenschaften:

- Das Experiment kann unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholt werden.
- Alle möglichen Ergebnisse sind eindeutig festgelegt.
- Es gibt mindestens zwei mögliche Ergebnisse.

Standardbeispiel: Werfen zweier Würfel



Dieses Zufallsexperiment, auf das wir uns im Folgenden immer wieder beziehen werden, besteht aus dem Werfen zweier handelsüblicher Würfel (= idealer Würfel). Es werden die beiden Augenzahlen betrachtet und diese addiert. Dieser Wert ist das Ergebnis des Zufallsexperiments.

Die Ergebnismenge Ω beinhaltet alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments.

Ω in unserem Standardbeispiel:

$\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

Anmerkung:

Würde man lediglich die Augenzahlen der beiden Würfel betrachten und sie nicht addieren, wäre die Ergebnismenge

$$\Omega = \{11; 12; \ldots; 16; 21; 22; \ldots; 26; \ldots; 61; 62; \ldots; 66\}.$$

Im Fach Mathematik, gerade in der Stochastik, gilt die Devise: Aufgabenstellung genau lesen!

https://pixabay.com/de/w%C3%BCrfel-sterben-lila-spiel-spielen-303769/ (cc0), 30.11.15

Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge.
Ereignisse werden in der Regel mit Großbuchstaben bezeichnet.

Beispiele von Ereignissen in unserem Standardbeispiel:

A = Augensumme ist gerade = $\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

(wird nun z. B. die Augensumme 8 gewürfelt, sagt man, das Ereignis A ist eingetreten.)

B = Augensumme ist eine Primzahl = $\{2; 3; 5; 7; 11\}$

C = Augensumme ist kleiner als 20 = Ω

D = Augensumme beträgt 1 = $\{\ \}$

Anmerkung:

Besteht eine Ergebnismenge aus n Elementen, gibt es $\mathbf{2^n}$ Ereignisse. In unserem Standardbeispiel gäbe es also $2^{11} = 2048$ verschiedene Ereignisse. Dazu gehören auch die „primitiven" Ereignisse Ω (gesamte Ergebnismenge) und $\{\ \}$ (leere Menge), die es bei jedem Zufallsexperiment gibt.

Weitere Fragestellungen zu unserem Standardbeispiel:

1. Prüfe, ob die Wahrscheinlichkeit aller Augensummen gleich groß ist.
2. Ermittle, welche Augensumme die größte Wahrscheinlichkeit besitzt.

Wiederholung: Zufallsexperiment, Ergebnismenge und Ereignis

Weitere Fragestellungen zu unserem Standardbeispiel:

1. Prüfe, ob die Wahrscheinlichkeit aller Augensummen gleich groß ist.

Nein!

Das Ereignis $A = \{2\}$ besitzt die Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2{,}8\,\%$$

da die Augensumme 2 nur durch das Würfeln zweier Einser zustanden kommen kann.

Für das Eintreten des Ereignisses $B = \{7\}$ gibt es mehrere Möglichkeiten:

$1+6;\ \ 2+5;\ \ 3+4;\ \ 4+3;\ \ 5+2;\ \ 6+1$

Somit gilt:

$$P(B) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 7 eintritt, ist also deutlich größer!

2. Ermittle, welche Augensumme die größte Wahrscheinlichkeit besitzt.

Die Augensumme 7 besitzt die größte Wahrscheinlichkeit, da es die meisten Möglichkeiten der Zusammensetzung gibt:

$1+6;\ \ 2+5;\ \ 3+4;\ \ 4+3;\ \ 5+2;\ \ 6+1$

Kapitel 1: Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

1. Axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit

Starten wir in die Stochastik der Oberstufe zunächst mit zwei Fragen:

Frage 1:

Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, mit einem handelsüblichen Würfel bei drei Würfen mindestens einmal eine Sechs zu werfen.

https://pixabay.com/de/brettspiel-mensch-%C3%A4rgere-dich-nicht-874825/ (cc0), 28.11.15
https://pixabay.com/de/fu%C3%9Fballstadion-fu%C3%9Fball-stadion-227561/ (cc0), 28.11.15

Frage 2:

Ermittle, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass Deutschland bei der nächsten Fußballweltmeisterschaft 2018 in Russland erneut den Titel holt.

Bei der ersten Frage gehen wir natürlich davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, $\frac{1}{6}$ beträgt, da bei einem nicht manipulierten Würfel jede Augenzahl die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt.

Ein Zufallsexperiment, bei dem jedes Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt, heißt Laplace-Experiment.

Bei drei Würfen handelt es sich um ein dreistufiges Zufallsexperiment. Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, führen wir folgende Ereignisse ein.

6 = Würfeln der Augenzahl Sechs

$\overline{6}$ = Würfeln der Augenzahl 1, 2, 3, 4 oder 5

Bei drei Würfen mindestens eine Sechs zu würfeln, bedeutet, genau eine, genau zwei oder drei Sechsen zu würfeln.

Genau eine Sechs zu würfeln ist möglich durch die Ergebnisse $6\bar{6}\bar{6}$, $\bar{6}6\bar{6}$ oder $\bar{6}\bar{6}6$ mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$.

Genau zwei Sechsen zu würfeln ist möglich durch die Ergebnisse $66\bar{6}$, $6\bar{6}6$ oder $\bar{6}66$ mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$.

666 mit der Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ ist das einzige Ergebnis für das Ereignis „drei *Sechser“*.

Somit können wir die Antwort zu Frage 1 liefern:

$P(\text{„mindestens eine Sechs“}) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{216} \approx \mathbf{42{,}1\ \%}$

Wir werden noch in diesem Abschnitt auf einen wesentlich kürzeren Lösungsweg hinweisen.

Bei diesem, wie auch bei vielen anderen Zufallsexperimenten, ist es problemlos möglich, jedem Ergebnis und Ereignis die zugehörige Wahrscheinlichkeit zuzuordnen.

Wie sieht es mit der Antwort zu Frage 2 aus?

Nun, eine Berechnung wie bei Frage 1 ist hier natürlich nicht möglich. Meine persönliche Meinung lautet: Die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland 2018 erneut Weltmeister wird, beträgt 20 %. Wettbüros müssen sich über derartige Fragen sehr viele Gedanken machen, um Wettquoten zu erstellen, die einerseits Fußballfans dazu verleiten, eine Wette abzuschließen, aber andererseits dem Wettbüro einen möglichst hohen Gewinn einbringen. Bei der Quotenerstellung fließt nicht nur Fußballsachverstand mit ein, sondern hauptsächlich eine gründliche Analyse von Statistiken.

Auch wenn eine Berechnung der Wahrscheinlichkeit zu Frage 2 nicht möglich ist, haben derartige Fragestellungen, wie z. B. bei den erwähnten Wettbüros, eine große Bedeutung.