



SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Eigenschaften von Binomialverteilungen erkunden

Das komplette Material finden Sie hier:

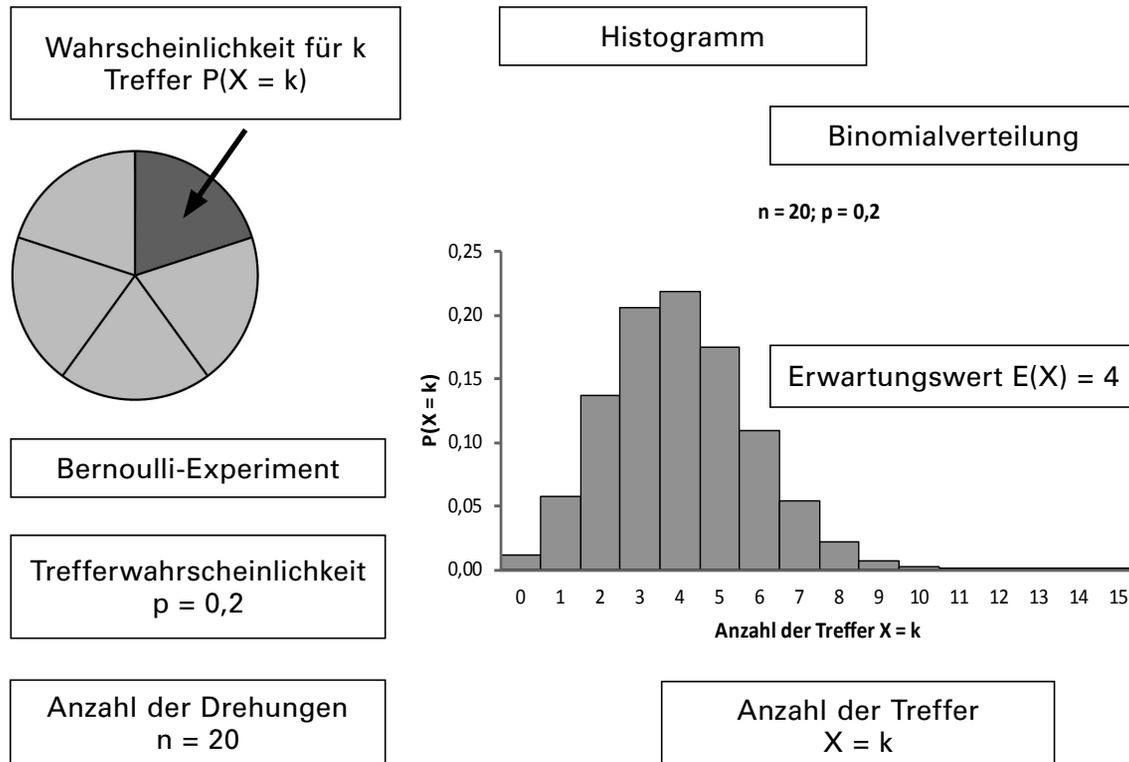
School-Scout.de



Eigenschaften von Binomialverteilungen erkunden

Dr. Christina Bauer, geb. Collet, IGS Kurt Schumacher, Ingelheim

Stummer Impuls zu M 1:



II/C

Klasse: 12 GK oder LK

Dauer: 2–3 Stunden

Inhalt: Ihre Schüler erkunden **anhand von Histogrammen mathematische Eigenschaften von Binomialverteilungen** und lernen, diese zu **begründen**.

Ihr Plus: Selbstständiges exploratives Arbeiten auch mithilfe des PCs oder Tablets/iPads (Excel-Tabelle zum Experimentieren mit Histogrammen); **Wiederholungsblatt** zu den Grundbegriffen der Binomialverteilung; fachübergreifend zu unterrichten (Informatik)

Der Beitrag behandelt mathematische Eigenschaften von Binomialverteilungen anhand eines Vergleichs von Histogrammen mit unterschiedlichem Stichprobenumfang n und unterschiedlichen Erfolgswahrscheinlichkeiten p . Ihre Schüler haben die Möglichkeit, bekanntes Wissen hinsichtlich der Darstellung (Aufstellen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung) zu aktivieren und ihre Aufmerksamkeit stärker auf die spezielle Verteilung und deren mathematische Eigenarten zu lenken. Ziel der Stunden ist, den Schülern Beobachtungen über mathematische Gesetzmäßigkeiten anhand eines konkreten Beispiels (hier: Drehen eines Glücksrades) mit ihren bisherigen Kenntnissen über Binomialverteilungen und Histogramme zu ermöglichen und sie zum Begründen der gefundenen Gesetzmäßigkeiten anzuregen.

Reihe 12 S 2	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	---------	----------	-----	---------	----------

Didaktisch-methodische Hinweise

Der Themenkomplex der Stochastik hat in den vergangenen Jahren eine starke Aufwertung erfahren, insbesondere durch die Verankerung der Leitidee „**Daten und Zufall**“ in den *KMK-Bildungsstandards* (auch) für die Oberstufe (KMK, 2012). Nicht nur innerhalb von Deutschland, sondern auch international wird der **Datenanalyse** im schulischen Curriculum eine große Bedeutung zugeschrieben.

Neben den Grundbegriffen „**Zufallsgröße**“, „**Wahrscheinlichkeitsverteilung**“ und „**kumulierte Verteilung**“ sollten Ihre Schüler Wahrscheinlichkeiten mithilfe der **Bernoulli-Formel** berechnen und tabellarisch ablesen können.

Didaktisch dienen die ausgearbeiteten Stunden dazu, **Prognoseintervalle**, die Voraussetzung für das **Testen von Hypothesen** sind, zu veranschaulichen. Die Schüler gewinnen bei dem Vergleich verschiedener Histogramme von Binomialverteilungen ein besseres Gefühl für selbige und können so den in den Folgestunden thematisierten Begriff der **Varianz** und **Standardabweichung** besser einordnen und verstehen.

II/C

Vergleicht man Histogramme mit unterschiedlichem **Stichprobenumfang n** und unterschiedlichen **Erfolgswahrscheinlichkeiten p** miteinander, so lassen sich folgende mathematische **Kernaussagen zu Binomialverteilungen** treffen (vgl. auch Fahse, in Vorbereitung und Tietze et al., 2002, S. 52 ff.):

1. Die Maximumstelle liegt nahe bei $n \cdot p$ (Erwartungswert).
2. Das Histogramm ist für $p = 0,5$ symmetrisch zu einem Maximum (gerades n) oder zu den beiden Maxima (ungerades n). Die Symmetrieachse verläuft durch $\frac{n}{2}$.
3. Die Histogramme sind für p und $1 - p$ zueinander symmetrisch (genauer: achsensymmetrisch zu $\frac{n}{2}$) mit $P(X = k) = P(Y = n - k)$, wobei $X = \text{Anzahl Erfolge}$ und $Y = \text{Anzahl Misserfolge}$.
4. Bei festem p mit $p \notin \{0, 1\}$ gilt:
Mit größer werdendem n werden die Histogramme immer flacher und breiter.
5. Bei festem p mit $p \notin \{0, 1\}$ gilt:
Bei kleinem n erreicht das Maximum einen höheren Wert als bei großem n .
6. Bei festem p mit $p \notin \{0, 1\}$ gilt: Mit größer werdendem n wird eine „**Glockenform**“ immer deutlicher und die Verteilung ist nahezu symmetrisch um $n \cdot p$.
7. Bei festem n gilt: Je mehr p von $0,5$ abweicht, desto größer wird der Wert des Maximums und verschiebt sich in Richtung $X = 0$ bzw. $X = n$.
($p > 0,5$: Histogramm nach rechts verschoben; nicht symmetrisch;
 $p < 0,5$: Histogramm nach links verschoben; nicht symmetrisch).
8. Bei festem n gilt: Die Histogramme erscheinen breiter, je näher p an $0,5$ liegt.

Das Begründen, insbesondere dieser mathematischen Kernaussagen zu Eigenschaften von Binomialverteilungen, fällt den meisten Schülern im Unterricht schwer und wird selten explizit geübt. Bruder und Müller identifizieren im Zusammenhang mit der Kompetenz Argumentieren fünf „Grundtypen des mathematischen Begründens“ (vgl. Bruder & Pinkernell, 2011, S. 3):

1. Begründung durch Bezug auf eine Definition,
2. Begründung durch Bezug auf einen Satz,

Reihe 12 S 3	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	---------	----------	-----	---------	----------

3. Begründung durch das Anwenden eines Verfahrens,
4. Begründung in Form eines Widerspruchsbeweises,
5. Widerlegung einer Aussage durch ein Gegenbeispiel.

Die in den Stunden von den Schülern zu entdeckenden Zusammenhänge können weitgehend mit dem Grundtyp 1 (Begründen durch Bezug auf eine Definition) begründet werden. Um die Aussage (6) zu begründen, müssen Ihre Schüler mit dem Grundtyp 2 (Begründung durch Bezug auf einen Satz) argumentieren:

Hierbei wird der Satz von de **Moivre-Laplace** angewendet. Damit Ihre Schüler nicht an den Schwierigkeiten der Begründungen scheitern, geben Sie in dieser Unterrichtsphase den Hinweis, sich an die **Bernoulli-Formel** zu erinnern oder an die **Definition des Binomialkoeffizienten**. Zudem können Sie Plausibilitätsbetrachtungen als „inhaltsanschaulichen Beweis“ nach Wittmann und Müller (1988) akzeptieren.

Bezüglich der in den Stunden zu erarbeitenden Zusammenhänge orientieren Sie sich an Ihrem eingeführten Lehrbuch, wobei Sie davon ausgehen können, dass die Schüler einen Großteil der dargestellten Zusammenhänge in Ihrer eigenen Formulierung entdecken werden. Für einen Grundkurs bietet es sich an, den Zusammenhang mit der Normalverteilung nicht weiter zu thematisieren und auf eine zu formale Schreibweise der Gesetzmäßigkeiten zu verzichten.

Methodische Hinweise

Als **Themeneinstieg** verwenden Sie einen außermathematischen Kontext des Beobachtens verschiedener **Glücksräder**. Hierbei sollen sich Ihre Schüler in die Lage eines Mathematikers versetzen, der in einer Firma arbeitet, die **Online-Glücksspiele** entwickelt. Als Mathematikexperten sollen die Lernenden verschiedene Glücksräder und deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen miteinander vergleichen und Gesetzmäßigkeiten für einen Testbericht zusammenstellen.

Das Setting der Stunde (Glücksräder im Vergleich) bietet für das dargestellte didaktisch-methodische Vorgehen verschiedene **Vorteile**. Zum einen wirkt der außermathematische Kontext nicht ablenkend, ist verständlich, vertraut und nicht zu komplex. Zum anderen sind die anhand der Diagramme zu leistenden Beobachtungen mit veränderlichem p gut in diesem Kontext interpretierbar. Konkurrierenden außermathematischen Alternativen (z. B. **Galton-Brett**, **Multiple-Choice**, **Torschützen**) fehlen oftmals die Interpretationsmöglichkeit bei dem Vertauschen von Erfolg und Misserfolg und eine veränderliche Wahrscheinlichkeit, die im Kontext interpretierbar ist und für n Versuche konstant bleibt.

Zeigen Sie Ihren Schülern in der **Einstiegsphase** ein **Glücksrad (M 1)**, an dem sie die Gewinnwahrscheinlichkeit $p = 0,2$ ablesen können, und ein Histogramm der zugehörigen Binomialverteilung mit $n = 20$ Drehungen. Der Einstieg in die Stunde dient außerdem dazu, bekanntes Wissen über die Binomialverteilung zu bündeln und zu wiederholen, um damit effektiv in der Arbeitsphase weiterarbeiten zu können.

Während dieser **Arbeitsphase (Erarbeitung I)** liegt den Schülern das Material **M 2** vor, in das folgende Ideen zur Gestaltung eingegangen sind:

Damit die Schüler möglichst viele und vielfältige Vermutungen zu mathematischen Eigenschaften der Binomialverteilung aufstellen können, wurden insgesamt **acht Histogramme** ausgewählt, die die Entdeckung der oben genannten Eigenschaften ermöglichen. Diese Entdeckungen sollen die Schüler durch einen Vergleich ausgewählter Histogramme beschreiten. Damit die Schlussfolgerungen nicht zu offensichtlich sind, sind die Histogramme mit gleichem n oder gleichem p bewusst nicht nebeneinander oder untereinander angeordnet, sondern vermischt dargestellt.

Reihe 12 S 4	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	---------	----------	-----	---------	----------

Um Schülerschwierigkeiten zu minimieren, wurde die y -Achse, die die Wahrscheinlichkeit für genau k Erfolge angibt, in allen Histogrammen gleich skaliert. Damit müsste für die Schüler z. B. erkennbar sein, dass bei festem p gilt:

Je größer n , desto flacher werden die Histogramme.

Weiter soll den Schülern das Sprechen über die einzelnen Histogramme erleichtert werden. Daher sind die verschiedenen Histogramme mit Buchstaben versehen, sodass eine Zuordnung beim Vergleich von Histogrammen mit gleichem n oder gleichem p leicht möglich ist.

Die Untersuchung der vorgegebenen Histogramme verschiedener Binomialverteilungen erfolgt in **Partnerarbeit**, da so gewährleistet ist, dass jeder Schüler bzw. jede Schülerin die Lösung des vorgestellten Problems nahezu eigenständig angeht.

Halten Sie die Tipps aus **M 5** bereit, die gestufte Hilfen bieten, um Vermutungen aufzustellen und diese zu begründen, falls ein Schüler nicht vorankommt. Das **Wiederholungsblatt M 3** dient zur Auffrischung der Vorkenntnisse und kann nach Bedarf eingesetzt werden.

Da bei der Erkundung von Gesetzmäßigkeiten anhand des Arbeitsblattes damit zu rechnen ist, dass diese von der Lerngruppe gefunden werden, kann die Besprechung der Ergebnisse der Erarbeitungsphase (**Sicherung I**) durch aus der Lerngruppe heraus erstellten Folien (siehe CD-ROM: Deine Ergebnisse – Lösungsfolien für die Schüler) erfolgen. Auch wenn diese nicht immer in einer absolut korrekten Formulierung und Schreibweise notiert werden, können Sie die Schülerantworten zur Besprechung und Würdigung der gewonnenen Erkenntnisse nutzen und ggf. korrigieren. Schön ist es, wenn die gewonnenen Erkenntnisse so anschaulich wie möglich präsentiert werden. Daher wäre es gut, wenn den Schülern gleichzeitig eine **Dokumentenkamera**, unter die sie die zum Vergleich herangezogenen Histogramme legen können, und ein **Overheadprojektor** zur Verfügung stehen, auf den die Schüler bei der Präsentation ihre Folie mit der notierten Beobachtung legen können.

Je nach zur Verfügung stehender Zeit ist an dieser Stelle auch zu überlegen, ob z. B. bestimmte Histogramme, die die Schüler zu Vermutungen geführt haben, mit der **Excel-Tabelle** für alle veranschaulicht werden sollen (siehe **CD-ROM 61**).

Sind alle von den Schülern entdeckten Gesetzmäßigkeiten vorgestellt, leiten Sie in eine kurze zweite Partnerarbeitsphase (**Erarbeitung II**) über, um so zu gewährleisten, dass sich tatsächlich jeder aus der Lerngruppe mit der Frage nach **Begründungen** auseinandersetzt. Besonders das Erkennen der **Symmetrie** im **Pascal'schen Dreieck** und damit in den Binomialkoeffizienten erfordert voraussichtlich die Bemühungen der gesamten Gruppe, weshalb anschließend der wesentliche Teil dieses Lernschritts im Unterrichtsgespräch in der **Sicherungsphase II** stattfinden sollte. Bei den von den Schülern gefundenen Begründungen können Sie insbesondere im Grundkurs auch beispielgebundene Begründungen als Vorstufe mathematischer Begründungen zulassen.

Abschließend sollen in der **Lernerfolgskontrolle (M 4)** in Form eines **Domino-Spiels** dem jeweiligen Histogramm die richtigen Parameter n und p zugeordnet werden.

Eine echte methodische Alternative zu dem bisher beschriebenen Vorgehen wäre eine komplett offene Stunde, in der Sie als Lehrkraft zurücktreten zugunsten selbstständigen explorativen Arbeitens. Da die Methode der Exploration, wie Fahse („**Exploration als Unterrichtsform in der Stochastik**“) sie beschreibt, deutlich mehr Zeit in Anspruch nimmt, ist in diesem Beitrag die Phase des selbstständigen Erkundens mit Dokumentation der Ergebnisse gekürzt durch die Vorgabe von Histogrammen.

Die **Tippkarten (M 5)** sind als gestufte Hilfen gedacht. Schneiden Sie die Klappkarten aus und knicken Sie sie so um, dass zunächst nur der erste Tipp sichtbar ist.

Reihe 12 S 5	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler können ...	Anforderungsbereich
K 1	L 5	... einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen,	I
K 4	L 4, L 5	... gegebene Histogramme verständlich interpretieren und in Beziehung zueinander setzen,	II
K 6	L 5	... Überlegungen und Ergebnisse verständlich darlegen, ... mathematische Informationen identifizieren und auswählen, ... mündliche und schriftliche Äußerungen mit mathematischem Gehalt von anderen Personen miteinander vergleichen, sie bewerten und ggf. korrigieren.	II, III

II/C**Abkürzungen***Kompetenzen*

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

Leitideen

L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

Anforderungsbereiche

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren



SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Eigenschaften von Binomialverteilungen erkunden

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

