

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus: *Mathematik und Musik - ein tolles Paar!*

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Mathematik und Musik

Reihe 12	Verlauf	Material S. 76	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-------------------	-----	---------	----------

M 9 Der Quintenzirkel

Verdoppelt sich die Frequenz, wird der Ton genau um eine Oktave höher. Bei der tenmaligen Steigerung einer als Referenzton festgesetzten Frequenz (hier: der Oktave C) hat sich 2^{10} mal die 12 Halbtonschritte unserer Tonleiter (also jeweils $\pm 1/2$ - Oktave) von dem Konstanten „1“ ausgehend fortgesetzt für die darüber liegende Oktave folgende Frequenzen:

Ton	a	b	h	c	cs	d	ds	e	f	fs	g	gs	a
Frequenz	440	466	494	523	554	587	622	660	700	744	792	843	896

Aufbau des Quintenzirkels nach der Quinten (12 Halbtonschritte) der Transponierten Diatonik – und zwar für die reine, pythagoräische, naturwissenschaftliche Stimmung. Hier ist die Frequenzverhältnisse 2:3. Man kommt also gerade eine Quinte höher, wenn die Frequenz mit dem Faktor 1,5 multipliziert (einmal $2/3$ Oktaven zu 1. Oktave, um $M 8$).

Beispiel: Von „a“ ausgehend ist das „a“ mit 880 Hz eine Quinte höher oder Oktave man diese Tone kreisförmig an, erhält man den sog. „Quintenzirkel“:

Quintenzirkel

In Uhrzeigersinn werden die Töne jeweils eine Quinte höher, bis man wieder zum Ausgangston gekommen ist.

Bei der septimalen Steigerung (also eine Siebentelsteigerung) um eine Oktave (also 7 Halbtonschritte) gerads die Multiplizieren der Frequenz mit dem Faktor $(\frac{7}{4})^2 = 1,2001$ und ist damit nicht exakt 1,5 (also nicht genau eine Quinte).

Aufgabe

Skizzieren Sie bei einem Ton Ihre Wahl im Quintenzirkel. Gehen Sie in einer (1) Richtung 12 Schritte im Kreis, bis Sie wieder beim Ausgangston angekommen sind. Berechnen Sie die Frequenzverhältnisse von Ende und Anfangston bei einer pythagoräischen, naturwissenschaftlichen Stimmung und vergleichen Sie es mit dem der septimalen Steigerung.

© Schäffer Pöschel Verlag 2010

III/B

Mathematik und Musik – ein tolles Paar!

Florian Borges, Traunstein



© Blend Images/Thinkstock

In den Fußstapfen von Louis Armstrong

Klassen: 9–12

Dauer: 12 Stunden

Inhalt: Angesprochen werden unter anderem folgende Themen:

- die Erzeugung von Tönen mit Instrumenten; Resonanz
- Frequenz und Wellenlänge
- Trigonometrische Funktionen für die Beschreibung von Tönen als Luftschwingungen und stehende Wellen
- die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus
- die Obertonreihen von Instrumenten
- Schwebungen, Tonsystem, Quintenzirkel, Wolfsquinte
- pythagoreische und temperierte Stimmung, pythagoreisches Komma
- Exponential- bzw. Logarithmusfunktion
- Kettenbruchentwicklung, goldener Schnitt

Ihr Plus:

- ✓ Fachübergreifender Unterricht (Musik, Physik, Informatik)

Mathematische Zusammenhänge im Reich der Musik sind vielen Schülern keineswegs bekannt bzw. bewusst. Dennoch ist das Interesse schnell geweckt. Insbesondere mithilfe der neuen Medien begeistern Sie die Lernenden dauerhaft.

Didaktisch-methodische Hinweise

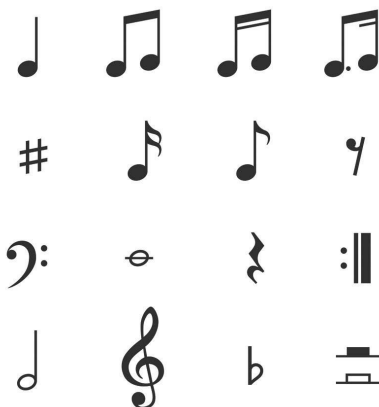
Ablauf

Beginnen Sie in festen Arbeitsgruppen mit den Grundlagen „**Töne, Frequenzen und Wellenlängen**“ (**M 1** und **M 2**) sowie der zunächst nicht sehr mathematischen Tonerzeugung mit Instrumenten (**M 4**). Anhand der Farbfolie (**M 3**) sammeln Sie in einem Brainstorming Antworten auf die Frage, wie bei den abgebildeten Instrumenten der Ton erzeugt wird. Danach folgen die **Additionstheoreme für Sinus und Kosinus** (**M 5**), die meist nicht vorausgesetzt werden können und daher an einer sehr einfachen Zeichnung hergeleitet werden. Letztlich auf deren Grundlage lassen sich sogar **Obertonreihen von Instrumenten** „nachstellen“. Die Software ist im Internet gratis verfügbar (**M 6**). **Fourierreihen** werden jedoch nicht thematisiert, obwohl das Programm diesen Namen trägt. Die hochinteressanten **Schwebungen** als direkte Anwendung von Material **M 5** folgen in Material **M 7**, ehe Material **M 8** unser **Tonsystem** einführt und dabei schöne, regelmäßige Vielecke als geometrische Schmankerl liefert.

Der **Quintenzirkel** wird in **M 9** erläutert. Die multiplikative Entwicklung der Frequenzen bei additiver Veränderung der Tonhöhe wird als **Exponentialfunktion** erkannt und wiederholt (**M 10**). Ggf. behandeln Sie an dieser Stelle die gebräuchlichsten Mittelwerte (**M 11** – optional!) und sprechen **Pythagoras' Problem** der **Wolfsquinte** in **M 12** an. Schließlich klärt die **Kettenbruchentwicklung** in **M 13** darüber auf, dass die 12 Halbtöne je Oktave (bei 7 Halbtönen einer Quinte) in unserem Tonsystem kein Zufall sind, sondern eine brillante Näherungslösung für das Problem von Pythagoras. Die Unterrichtseinheit wird durch eine Lernerfolgskontrolle (**M 14**) abgerundet, in der einige wichtige Aspekte wiederholt werden.

Vorkenntnisse

- trigonometrische Funktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktion, insbesondere Logarithmengesetze
- Potenz- und Wurzelgesetze
- Dreiecksbeziehung, insbesondere Innenwinkelsumme
- Prozent- und Zinsrechnung
- Begriff der Amplitude
- altersübliches musikalisches Gymnasial-Vorwissen



© iStock/Thinkstock

Die Notation von Musik hat viel mit System zu tun!

Vorbereitung und Ablauf der Arbeit an der Lerntheke

Sie kopieren die Materialien **M 1**, **M 2** und **M 4–M 13** in Klassenstärke und laminieren jeweils ein Exemplar, das Sie mit den Kopien am Fensterbrett auslegen. Ihre Schüler teilen Sie in Arbeitsgruppen auf. Die Lernenden holen sich die Materialien jeweils in Gruppenstärke und fertigen bei **M 1**, **M 2** und **M 4–M 13** jeweils eine **Folie** mit den Aufgabenlösungen an, die dann in der Folgestunde stichprobenartig im Plenum oder nur von der Lehrkraft korrigiert wird.

Reihe 12 S 3	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Ziele

Die Schüler

- kennen den funktionalen Zusammenhang zwischen Frequenz und Tonhöhe,
- wiederholen und vertiefen die trigonometrischen Funktionen,
- lernen verschiedene Mittelwerte und deren Anwendungen kennen,
- verstehen den Konflikt zwischen temperierter und reiner Stimmung,
- lernen Kettenbrüche in bescheidenem Rahmen „experimentell“ am Taschenrechner kennen, ohne durch theorielastige Details belastet zu werden.

III/B

Bezug zu den Bildungsstandard der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler...	Anforderungsbereich
K 2, K 3	L 2, L 4	... erleben die physikalischen Begriffe Schwingung, Welle, Resonanz und Schwebung im Kontext der Musik als mathematisch beschreibbare Inhalte (M 1–M 4, M 7),	II
K 2, K 5	L 3, L 4	... leiten algebraische Zusammenhänge (Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen) geometrisch her und formen sie für weitere Erkenntnisse algebraisch um (M 5),	II
K 1, K 4	L 3, L 4	... wiederholen musikalisches Grundwissen vor dem mathematischen Hintergrund der zugehörigen Frequenzen bzw. Wellenlängen (M 6, M 8),	II
K 1, K 2, K 5	L 1	... lernen den Quintenzirkel kennen und erkennen die „ Wolfsquinte “ letztlich als Teilbarkeitsproblem (M 9 bzw. M 12),	II
K 1, K 3, K 5, (K 6)	L 4, (L 5)	... ziehen Parallelen zu anderen exponentiellen Zusammenhängen (M 10) und wiederholen verschiedene Mittelwerte und deren Anwendungen (M 11 – optional!),	III
K 3, K 5	L 1	... lernen beispielhaft die Kettenbrüche kennen und damit eine Begründung für unser Tonsystem (M 13).	II, III

Abkürzungen

Kompetenzen

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

Leitideen

L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

Anforderungsbereiche

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus: *Mathematik und Musik - ein tolles Paar!*

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Mathematik und Musik

Reihe 12	Verlauf	Material S. 76	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-------------------	-----	---------	----------

M 9 Der Quintenzirkel

Verdoppelt sich die Frequenz, wird der Ton genau um eine Oktave höher. Bei der tenfachen Steigerung einer als Halbtonschritt (zwei 1/2) ist das bedeutet, dass der Faktor für eine Frequenz zur nächsten Halbtonfrequenz (unter dem gleichen Wert k , hat laut M 8, bei den 12 Halbtonen unseres Tonwesens also jeweils $\sqrt[12]{2} = \sqrt[12]{1,0584}$. Von dem Konstanten „ k “ ausgehend liefert die für die darüber liegende Oktave folgende Frequenzen:

Ton	a	b	h	c	ck	d	dk	e	f	fk	g	gk	a
Frequenz	440	466	484	512	554	587	622	659	704	754	813	880	938

Auf der der Oktave ist durch die Quinte (F) mathematisch die Transposition – und zwar für die reine, pythagoreische, naturwissenschaftliche Stimmung – und zwar für die reine, pythagoreische, naturwissenschaftliche Stimmung. Hier ist die Frequenz umwiegend 2/3. Man kommt also gerade eine Quinte höher, wenn die Frequenz mit dem Faktor 1,5 multipliziert (einmal $2/3$ Oktaven zu 1. Oktaven, vgl. M 8).

Beispiel: Was „a“ ausgehend ist das „a“ mit 880 Hz eine Quinte höher oder Oktave man diese Tone kreisförmig an, erhält man den sog. „Quintenzirkel“:

Quintenzirkel:

In Uhrzeigersinn werden die Töne jeweils eine Durde höher, im Uhrzeigersinn jeweils eine Durde tiefer. In der Mitte des Kreises steht der Ton „a“.

Bei der temperierten Stimmung bedeutet eine Transposition um eine Durde (also 2 Halbtonen) gerade die Multiplikation der Frequenz mit dem Faktor $\sqrt[12]{2} = \sqrt[12]{1,0584}$ und ist damit nicht exakt 1,5 (also nicht genau ein).

Aufgabe

Skizzieren Sie bei einem Ton Ihre Wahl im Quintenzirkel. Geben Sie in einer (1) Richtung 12 Schritte im Kreis, bis Sie wieder beim Ausgangston ankommen. Berechnen Sie die Frequenzverhältnisse von 12 und vergleichen Sie mit dem pythagoreischen, naturwissenschaftlichen Stimmung und vergleichen Sie es mit der temperierten Stimmung.

© Schäffer Pöhlmann Verlag 2010

III/B