

# SCHOOL-SCOUT.DE

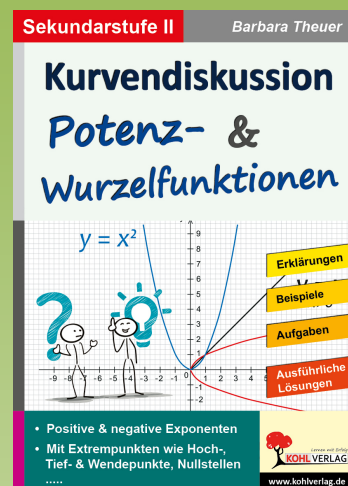
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Kurvendiskussion / Potenzfunktionen & Wurzelfunktionen*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)



# Inhalt

	<u>Seite</u>
Vorwort	4
<b>1</b> Funktionen beschreiben Wachstumsprozesse	5 - 6
<b>2</b> Monotonieverhalten von Funktionen	7 - 9
<b>3</b> Elementare Funktionsuntersuchungen von linearen und quadratischen Funktionen	10 - 12
<b>4</b> Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten	13 - 14
<b>5</b> Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten	15 - 16
<b>6</b> Systematisierung von Potenzfunktionen	17 - 21
<b>7</b> Umkehrfunktionen	22 - 24
<b>8</b> Wurzelfunktionen	25 - 26
<b>9</b> Polynomfunktionen	27 - 31
<b>10</b> Der Differentialquotient zur Bestimmung des Anstieges einer Funktion	32 - 34
<b>11</b> Wachstumsverhalten von Funktionen und Änderungsrate	35 - 36
<b>12</b> Die Potenzregel zum Differenzieren von Potenzfunktionen	37
<b>13</b> Weitere elementare Ableitungsregeln	38 - 40
<b>14</b> Die Ableitung von Wurzelfunktionen	41
<b>15</b> Tangenten an Funktionsgraphen	42
<b>16</b> Was interessiert? – Eigenschaften von Funktionsgraphen	43
<b>17</b> Monotonieverhalten von Funktionen und erste Ableitung	44 - 45
<b>18</b> Krümmungsverhalten und zweite Ableitung	46
<b>19</b> Anwendung des Monotonie- und Krümmungskriteriums beim Zeichnen von Funktionsgraphen	47
<b>20</b> Verhalten der Ableitungsfunktionen an Extrem- und Wendestellen	48
<b>21</b> Tangenten, lokale und globale Extrema sowie andere Irrtümer – Ein Quiz	49
<b>22</b> Notwendige und hinreichende Kriterien für Extrema und Wendepunkte	50 - 51
<b>23</b> Beispiel für eine vollständige Kurvendiskussion	52 - 53
<b>24</b> Übungen zur Kurvendiskussion von Potenzfunktionen	54 - 55
<b>25</b> Teste dich selbst	56
<b>26</b> Die Lösungen	57 - 83

# Vorwort

Funktionen beschreiben Wachstumsprozesse und Abhängigkeiten von Größen. Die Aufgabe der Mathematik besteht darin, diese Prozesse und Zusammenhänge zu modellieren und mit Hilfe von mathematischen Funktionen zu beschreiben. Solche Beispiele sind das Wachstum von verzinstem Kapital, was sich exakt berechnen lässt, Wachstum oder Abnahme von physikalischen Größen, wie zum Beispiel die Zunahme von Geschwindigkeit und Weg bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung bei Vernachlässigung der Reibung, der Abfall des Luftdruckes mit zunehmender Höhe sowie das biologische Wachstum von Algen, Bakterienkulturen, welches sich nur annähernd unter Einhaltung bestimmter Bedingungen mathematisch beschreiben lässt.

Mit dieser Aufgabenstellung, Wachstumsprozesse mathematisch zu beschreiben, setzt vorliegendes Material ein. Während das Wachstum von Kapital und biologisches Wachstum mit Hilfe von Exponentialfunktionen beschrieben werden kann, was Inhalt des in Kürze erscheinenden Bandes „Kurvendiskussion / Exponential- & Logarithmusfunktionen“ sein wird, widmet sich dieser Band den Potenz- und Wurzelfunktionen.

Das Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung, welches den Weg als quadratische Funktion der Zeit beschreibt, wird am Beispiel des freien Falls, den der Extremsportler Felix Baumgartner im Jahr 2012 aus 38.969,4 m Höhe zurücklegte, als anschauliches Beispiel für das Wachstum einer physikalischen Größe zur Einführung in die Problematik vorgestellt.

Nach diesen einleitenden Seiten folgen elementare Untersuchungen der Eigenschaften von Potenzfunktionen und Berechnungen ohne Differentialrechnung – geeignet zur Wiederholung und Festigung der Grundlagen zu diesem Funktionstyp. Dabei kommt auch der Betrachtung der Wurzelfunktionen als Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen Bedeutung zu.

Die Eigenschaften von Funktionen und ihrer Graphen lassen sich aber – wenn es über quadratische Funktionen hinausgeht – nur mit den Mitteln der Differentialrechnung analysieren und diesem Thema widmet sich dieser Band hauptsächlich.

Obwohl Gymnasiasten der Oberstufe die Techniken des selbstständigen Wissenserwerbs mit Lehrbuch sowie dem Mitschreiben von Tafelbildern und Ausführungen des Lehrers trainieren sollten, um später als Studenten entsprechende Arbeitstechniken zu beherrschen, gibt es doch hin und wieder Gelegenheiten zum Einsatz eines Arbeitsblattes – ob nun ohne größeren Schreib- und Zeitaufwand zur „Erwärmung“ zu Beginn einer Unterrichtsstunde, zum Ausklang der Stunde vor dem Pausenklingeln oder in Vertretungsstunden.

Der Inhalt der Kopiervorlagen beschränkt sich nicht auf Übungen zu Kurvenuntersuchungen. Vielmehr sollen die Aufträge die Schüler auch dazu führen, die Bedeutung des Ableitungsbegriffes als Grenzwert der Änderungsrate einer Größe für einen gegen Null strebenden Zeitraum sowie die Zusammenhänge zwischen Anstieg des Graphen einer Funktion, ihres Monotonie- und Krümmungsverhaltens, und der Existenz von Extrem- und Wendepunkten zu vertiefen. Gerade im Zusammenhang mit der Nutzung des graphikfähigen Taschenrechners (GTR) sollte mit inhaltlichen Betrachtungen von mathematischen Begriffen und Verfahren einem starren Vorgehen nach Formeln und rein mechanischer Benutzung des Taschenrechners entgegengewirkt werden.

Auch in diesem Sinne wünschen wir Schülern und Lehrern Erfolg bei der Arbeit mit dem vorliegendem Material.

Das Kohlverlags-Team und

**Barbara Theuer**

# 1 Funktionen beschreiben Wachstumsprozesse

In der Mathematik bezeichnet Wachstum die Zunahme einer bestimmten Messgröße in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei kommt der Mathematik die Aufgabe zu, Wachstumsvorgänge in der Praxis mathematisch zu modellieren und die zeitliche Änderung der Messgrößen mittels Funktionen zu beschreiben. Das Gegenteil von Wachstum ist die Schrumpfung, also die Abnahme einer Messgröße – in einigen Fällen auch als Zerfall bezeichnet.



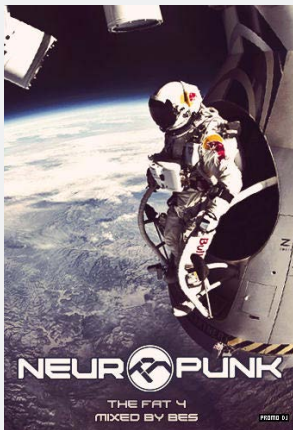
**Aufgabe 1:** Nenne Beispiele für mathematisches Wachstum.

---

---

---

---



Der Extremsportler Felix Baumgartner stieg am 14. Oktober 2012 von der Walker Air Force Base bei Roswell, New Mexiko (USA), mit einem Heliumballon in einer Druckkapsel in die Stratosphäre auf, um mit Schutzanzug und Fallschirm aus einer Höhe von 38.969,4 m, wo der Luftdruck nur geringer als 10 hPa ist, abzuspringen. In der Druckkapsel wurde der Druck bis kurz vor dem Ausstieg auf rund 0,55 bar (550 hPa) gehalten, was rund 4900 m Höhe über dem Meeresspiegel entspricht. Das entspricht etwa dem natürlichen Luftdruck auf dem Mont Blanc. Dabei fiel Baumgartner 36.402,6 m frei und erreichte nach dieser zurückgelegten Strecke eine Endgeschwindigkeit von 1357,6 km/h. Erst dann öffnete sich der Fallschirm. (Baumgartners Rekord hatte bis zum 24. Oktober 2014 Bestand, als dieser von Alan Eustace gebrochen wurde, der aus etwa 41.419 m sprang.)

**Aufgabe 2:** In den Sachverhalten rund um den Stratosphärensprung Baumgartners spielen Wachstumsvorgänge, welche sich mathematisch beschreiben lassen, eine Rolle. Welche Messgrößen wachsen oder (zer-)fallen hier? Charakterisiere das Wachstum bzw. im weiteren Sinne die funktionalen Zusammenhänge (z. B. exponentiell, linear, quadratisch, Zunahme, Abnahme). Wiederhole dazu auch die Bewegungsgesetze der Physik und die internationale Höhenformel.

---

---

---

---

---

# 1 Funktionen beschreiben Wachstumsprozesse

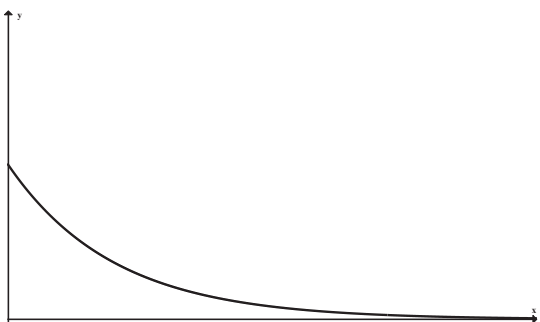
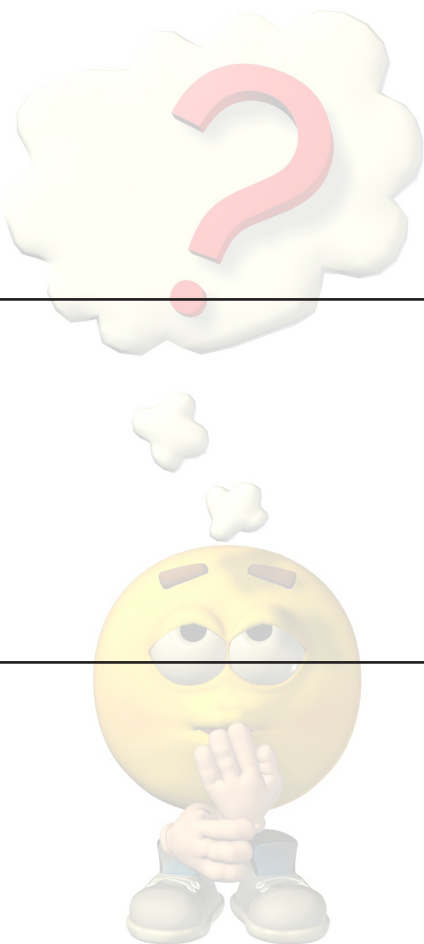
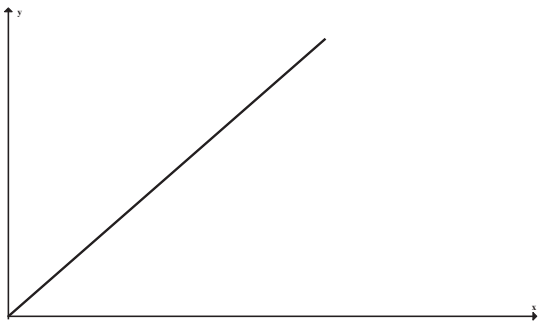
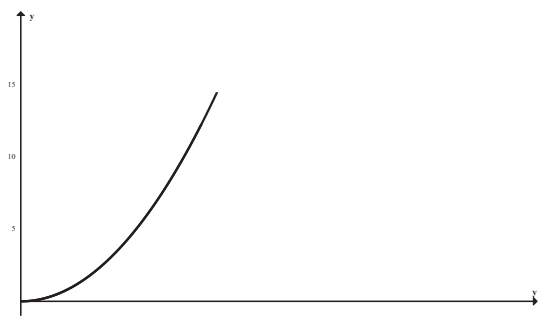
Um das Wachstumsverhalten einer Messgröße zu veranschaulichen, werden die Messpunkte – eine genügend große Menge vorausgesetzt – in einem Diagramm dargestellt. Da die interessierenden Größen oft nicht kontinuierlich gemessen werden können, ergeben sich nur diskrete Punkte im Diagramm.

Das tatsächliche Verhalten zwischen den diskreten, abgetasteten Werten ist genau genommen nicht bekannt und kann nur bei genügend enger Abtastung angenähert werden, sodass sich zur Veranschaulichung eine explizite, kontinuierliche Wachstumsfunktion  $B(t)$  ergibt, die den Messwert  $w(t)$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  in ihrem Definitionsbereich wiedergibt.

Zu den mathematischen Wachstumsmodellen, welche in der Schulmathematik Eingang finden, gehören unter anderem:

- lineares Wachstum
- potientes, dabei insbesondere quadratisches Wachstum
- exponentielles Wachstum bzw. exponentieller Zerfall

**Aufgabe 3:** Welche Wachstumsprozesse bzw. funktionalen Abhängigkeiten, die im Zusammenhang mit Felix Baumgartners Stratosphärensprung (siehe Seite 5) stehen, lassen sich durch unten angegebene Funktionsgraphen beschreiben? Ordne die Sachverhalte stichpunktartig den in der Tabelle angegebenen Funktionsgraphen zu. Gib möglicherweise auch das entsprechende physikalische Gesetz an. Welche physikalischen Größen entsprechen den Koordinaten  $x$  und  $y$ ?

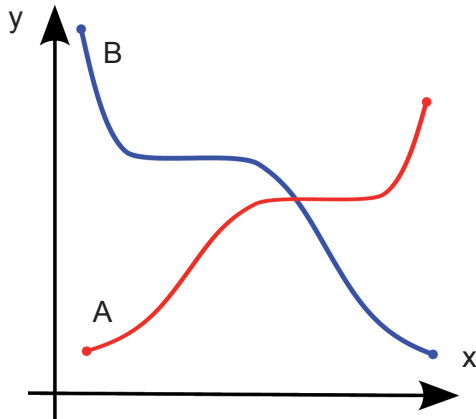
Funktionstyp	Beispiel für Wachstum
	
	
	

# 2

## Monotonieverhalten von Funktionen

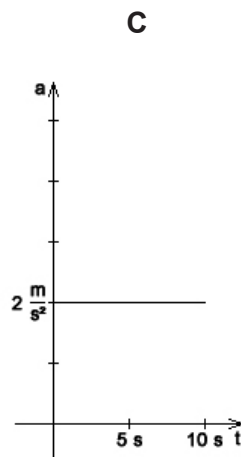
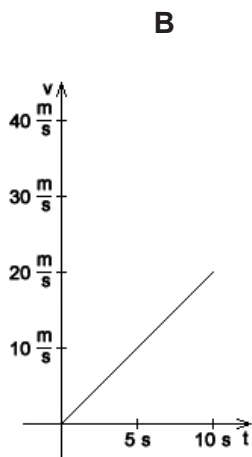
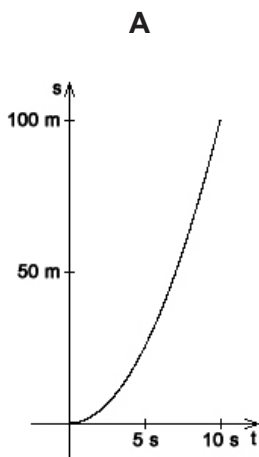
Eine Funktion  $f(x)$  ist in einem Intervall **monoton wachsend**, wenn für zwei beliebige  $x$ -Werte  $x_1$  und  $x_2$  aus diesem Intervall gilt:  
 Aus:  $x_1 < x_2$ ;  $x_1, x_2 \in I \subset \mathbb{R}$   
 folgt:  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . (Siehe Graph A.)  
 Schließt man die Gleichheit aus, handelt es sich um **streng** monotonen Wachstum.

Eine Funktion  $f(x)$  ist in einem Intervall **monoton fallend**, wenn für zwei beliebige  $x$ -Werte  $x_1$  und  $x_2$  aus diesem Intervall gilt:  
 Aus:  $x_1 < x_2$ ;  $x_1, x_2 \in I \subset \mathbb{R}$   
 folgt:  $f(x_1) \geq f(x_2)$ . (Siehe Graph B.)  
 Schließt man die Gleichheit aus, ist die Funktion in diesem Intervall **streng** monoton fallend.



Bei Wachstumsprozessen in der Praxis entspricht  $w_1$  dem Wert der Messgröße zu einem Zeitpunkt  $t_1$  und  $w_2$  dem Messwert zu einem späteren Zeitpunkt  $t_2$ . Ist der zu einem späteren Zeitpunkt gemessene Wert  $w_2$  größer als der Messwert  $w_1$ , also  $w_2 > w_1$ , dann spricht man von positivem Wachstum. Ist der zweite Wert jedoch kleiner als der erste, also  $w_2 < w_1$ , spricht man von negativem Wachstum bzw. Schrumpfung, Abnahme oder Zerfall. Im Falle  $w_2 = w_1$  bezeichnet man den Sachverhalt als Nullwachstum.

**Aufgabe 1:** Begründe, dass mit den untenstehenden Diagrammen ein und derselbe Bewegungsablauf beschrieben wird. Welche funktionalen Zusammenhänge bzw. physikalischen Gesetze werden durch die Funktionsgraphen jeweils veranschaulicht? Lies die Messwerte zum Zeitpunkt  $t = 5$  s aus den entsprechenden Graphen ab. Berechne die Messwerte dann exakt. Charakterisiere auch das Monotonieverhalten. Schreibe deine Antworten in die Tabelle auf Seite 8.



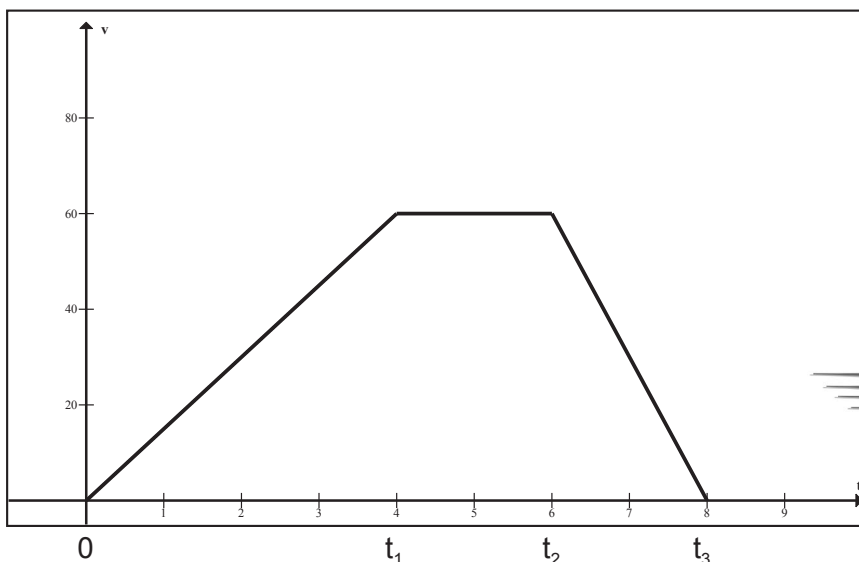
ist doch logisch



## 2 Monotonieverhalten von Funktionen

Diagramm	Graph A	Graph B	Graph C
Beschreibung des Sachverhaltes und charakteristisches Verhalten der Messgröße			
physikalisches Gesetz			
abgelesener Messwert zum Zeitpunkt $t = 5s$			
berechneter Messwert zum Zeitpunkt $t = 5s$			
Monotonieverhalten der Funktion im abgebildeten Intervall			

**Aufgabe 2:** Beschreibe das Monotonieverhalten des Graphen in den entsprechenden charakteristischen Intervallen und interpretiere das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm physikalisch.



# Kurvendiskussion / Potenz- & Wurzelfunktionen

2. Digitalauflage 2020

© Kohl-Verlag, Kerpen 2016  
Alle Rechte vorbehalten.

Inhalt: Barbara Theuer  
Umschlagbild: © julvil & Matthias Enter - fotolia.com  
Cliparts: © clipart.com  
Grafik & Satz: Kohl-Verlag

**Bestell-Nr. P11 853**

**ISBN: 978-3-95686-423-0**

© Kohl-Verlag, Kerpen 2020. Alle Rechte vorbehalten.

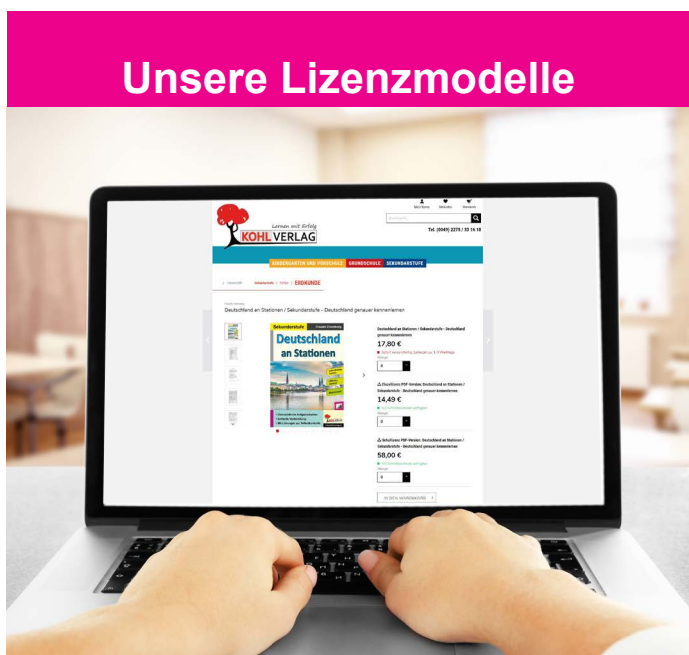
Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und unterliegen dem deutschen Urheberrecht. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages (§ 52 a UrhG). Weder das Werk als Ganzes noch seine Teile dürfen ohne Einwilligung des Verlages an Dritte weitergeleitet, in ein Netzwerk wie Internet oder Intranet eingestellt oder öffentlich zugänglich gemacht werden. Dies gilt auch bei einer entsprechenden Nutzung in Schulen, Hochschulen, Universitäten, Seminaren und sonstigen Einrichtungen für Lehr- und Unterrichtszwecke. Der Erwerber dieses Werkes in PDF-Format ist berechtigt, das Werk als Ganzes oder in seinen Teilen für den Gebrauch und den Einsatz zur Verwendung im eigenen Unterricht wie folgt zu nutzen:

- Die einzelnen Seiten des Werkes dürfen als Arbeitsblätter oder Folien lediglich in Klassenstärke vervielfältigt werden zur Verwendung im Einsatz des selbst gehaltenen Unterrichts.
- Einzelne Arbeitsblätter dürfen Schülern für Referate zur Verfügung gestellt und im eigenen Unterricht zu Vortragszwecken verwendet werden.
- Während des eigenen Unterrichts gemeinsam mit den Schülern mit verschiedenen Medien, z.B. am Computer, Tablet via Beamer, Whiteboard o.a. das Werk in nicht veränderter PDF-Form zu zeigen bzw. zu erarbeiten.

Jeder weitere kommerzielle Gebrauch oder die Weitergabe an Dritte, auch an andere Lehrpersonen oder pädagogische Fachkräfte mit eigenem Unterrichts- bzw. Lehrauftrag ist nicht gestattet. Jede Verwertung außerhalb des eigenen Unterrichts und der Grenzen des Urheberrechts bedarf der vorherigen schriftlichen Zustimmung des Verlages. Der Kohl-Verlag übernimmt keine Verantwortung für die Inhalte externer Links oder fremder Homepages. Jegliche Haftung für direkte oder indirekte Schäden aus Informationen dieser Quellen wird nicht übernommen.

Kohl-Verlag, Kerpen 2020

## Unsere Lizenzmodelle



## Der vorliegende Band ist eine PDF-Einzellizenz

Sie wollen unsere Kopiervorlagen auch digital nutzen? Kein Problem – fast das gesamte KOHL-Sortiment ist auch sofort als PDF-Download erhältlich! Wir haben verschiedene Lizenzmodelle zur Auswahl:



	Print-Version	PDF-Einzellizenz	PDF-Schullizenz	Kombipaket Print & PDF-Einzellizenz	Kombipaket Print & PDF-Schullizenz
Unbefristete Nutzung der Materialien	X	X	X	X	X
Vervielfältigung, Weitergabe und Einsatz der Materialien im eigenen Unterricht	X	X	X	X	X
Nutzung der Materialien durch alle Lehrkräfte des Kollegiums an der lizenzierten Schule			X		X
Einstellen des Materials im Intranet oder Schulserver der Institution			X		X

Die erweiterten Lizenzmodelle zu diesem Titel sind jederzeit im Online-Shop unter [www.kohlverlag.de](http://www.kohlverlag.de) erhältlich.



## Bildnachweise

Seite 5 © electriceye - Fotolia.com;  
Seite 5, 9, 35 © diego1012 - Fotolia.com; dj bess - wikipedia.org;  
Seite 6 © Adrichel - wikipedia.org;  
Seite 7 © Wfstb; Patagonier - wikipedia.org;  
Seite 8 © SNEHIT - fotolia.com;  
Seite 9 © wikimedia.org; © fotomek - fotolia.com;  
Seite 10-12, 27, 52 © clipart.com;  
Seite 13, 20 © Christian Pedant - Fotolia.com;  
Seite 6, 13, 31, 38 © Winne - Fotolia.com;  
Seite 14, 16 © ottoflick - fotolia.com;  
Seite 37, 42 © Wetzkaz-Crailsheim - Fotolia.com;  
Seite 7, 37, 50 © Gabriele Rohde - Fotolia.com;  
Seite 39, 41, 48 © DeepReal - Fotolia.com;  
Seite 7, 10, 11, 15-19, 30, 38, 40-43, 45, 55 © Steve Young - Fotolia.com;  
Seite 11, 28, © vert102 - Fotolia.com;  
Seite 32, 34 © Dennis Cox; nezezon - Fotolia.com;  
Seite 11, 15, 41, 46, 49 © koya979 - Fotolia.com;  
Seite 29, 31, 33, 37, 39, 41-43, 45, 50, 51 © meen\_na - Fotolia.com;  
Seite 38, 39, 49 © CG - Fotolia.com;  
Seite 8, 22-24, 26, 35, 44-46, 49, 52, 53, 56, 77 © Piumadaquila - Fotolia.com;  
Seite 22 © vector master - Fotolia.com;  
Seite 23 © jokatoons - Fotolia.com;  
Seite 25 © NJ; PixBox; Blende11.photo - Fotolia.com;  
Seite 27 © alphaspirt - Fotolia.com; © Geek3 - wikipedia.org;  
Seite 29 © Marino-sl - wikipedia.org;  
Seite 30 © fabioberti.it - Fotolia.com;  
Seite 33 © Afgeleide - wikipedia.org;  
Seite 34 © Slobodan Djajic - Fotolia.com;  
Seite 36 © styleuneeed - Fotolia.com;  
Seite 48 © Antonsusi - wikipedia.org;  
Seite 53 © Wolfgang Dvorak\_wikicommon.org

# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Kurvendiskussion / Potenzfunktionen & Wurzelfunktionen*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)

