

# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Kinder entdecken Bruchzahlen....*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)



Dieter Ellrott / Barbara Aps-Ellrott

# Kinder entdecken Bruchzahlen

... zum Denken in Verhältnissen  
Mathematik handelnd erfahren ...

3. bis 6. Klasse

Kopiervorlagen mit Lösungen

An dieser Stelle möchten wir allen Beteiligten danken:

den Kindern, für ihre Bereitschaft mit uns zu arbeiten,  
den Lehrerinnen und Lehrern für ihre Offenheit, Probleme zu benennen.  
Dank gilt auch dem Verlag Lemberger für seine Bereitschaft, dieses Buch zu vertreiben.

Und danken möchten wir auch unseren Freunden Maike Bochow, Rudi Haug und  
Michael Strosetzky für ihre kritische Sichtweise.

Barbara Aps-Ellrott  
Dieter Ellrott

Gedruckt auf umweltbewusst gefertigtem, chlorfrei gebleichtem  
und alterungsbeständigem Papier.

1. Auflage 2015

Nach den seit 2006 amtlich gültigen Regelungen der Rechtschreibung

© by Brigg Verlag KG

Alle Rechte vorbehalten.

Originalausgabe: Bildungsverlag Lemberger  
A-1170 Wien, [www.lemberger.at](http://www.lemberger.at)



Covergestaltung und Illustrationen  
Gernot Lauboeck, da  
Graphic Design, Wien  
[www.Lauboeckdesign.at](http://www.Lauboeckdesign.at)

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den  
gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.  
Hinweis zu § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung  
eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und  
sonstigen Bildungseinrichtungen.

ISBN 978-3-95660-031-9

[www.brigg-verlag.de](http://www.brigg-verlag.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung</b> .....	4
<b>1. Malnehmen und Teilen</b> .....	
1. Modelle zum Malnehmen und Teilen .....	10
2. Zahlenreste.....	16
3. Längen und Zahlen.....	18
4. Restlängen .....	22
<b>2. Gleiche Verhältnisse</b> .....	
1. Ähnlichkeit erfahren .....	26
2. Ähnlichkeit ausmessen.....	30
3. Ähnlichkeiten sehen und zahlenmäßig reflektieren.....	36
4. Ähnlichkeiten und Wertvergleiche .....	38
<b>3. Primzahlen</b> .....	
1. Zahlen und Teiler.....	40
2. Teilbarkeit.....	44
3. Primzahlzerlegung .....	50
4. Primzahloperatoren .....	60
<b>4. Bruchzahlen</b> .....	
1. Bruchzahlmodelle .....	64
2. Bruchzahlen ordnen.....	70
3. Hundertstelbrüche .....	72
4. Positive rationale Zahlen .....	74
5. Rechnen mit Bruchzahlen .....	76
<b>5. Kopiervorlagen</b> .....	88

# Einführung

Unser Buch „Kinder entdecken Bruchzahlen“ ist als Vertiefung der Multiplikation und Division in der Grundschule und als Voraussetzung zur Behandlung der Bruchzahlen in weiterführenden Schulen gedacht. Mit dem Untertitel

– zum Denken in Verhältnissen – Mathematik handelnd erfahren –  
machen wir unsere pädagogische Intention deutlich.

## Zahlen

Jeder kennt Zahlen, kann sie schreiben und benennen.

Jeder benutzt Zahlen:

Zahlen sagen etwas über die „Mächtigkeit“ aus, sie beschreiben, wie viel Dinge man von einer Sorte hat: Zahlen beschreiben Anzahlen.

Zahlen geben einen Platz in einer Reihenfolge an.

Mit Hilfe von Zahlen kann man über das „Zählen“ indirekt Mengen vergleichen. Zahlen vor Maßeinheiten geben das Vielfache von Größeneinheiten an.

Zahlen beschreiben wertgleich „Zahlen-Verknüpfungen“.

Mit Zahlen lassen sich bestimmte Objekte „verschlüsseln“ z. B. als Haus- und Telefonnummern oder als Postleitzahlen für Orte.

Diese Zahlen im alltäglichen Umgang sind die „*Natürlichen Zahlen*“.

Über den Alltagsgebrauch hinaus haben die „*Natürlichen Zahlen*“ interessante Eigenschaften:

Es gibt eine kleinste Zahl, eine Zahl, aus der sich alle anderen erzeugen lassen. Einige natürliche Zahlen sind nicht weiter multiplikativ zerlegbar. Diese Zahlen heißen Primzahlen. Die Primzahlen sind die Bausteine der natürlichen Zahlen; die Zerlegung zusammengesetzter natürlicher Zahlen in Primzahlen ist eindeutig.

Bei der Division natürlicher Zahlen geht die Teilung nicht immer ganzzahlig auf, es bleiben Reste z.B.  $14:3=4$  Rest 2. Reste haben auf den ersten Blick einen absoluten Wert, das, was übrig bleibt; aber dieser Rest muss auch im Zusammenhang zur Teilung gesehen werden. Reste haben in Bezug zur Teilung einen relativen Wert, der durch eine Bruchzahl beschrieben wird:

$$14:3 = 12:3 + 2:3 = 4 \frac{2}{3}$$

*Bruchzahlen sind also Quotienten von zwei natürlichen Zahlen.*

Der Quotient  $2:3$  wird durch die Bruchzahl  $\frac{2}{3}$  beschrieben. Aber zu dieser Bruchzahl gehören noch viele andere Quotienten, z.B.:  $6:9$ ,  $10:15$ ,  $62:93$  etc. Man kann auch sagen, diese Zahlenpaare sind verhältnisgleich. Bruchzahlen beschreiben also auch verhältnisgleiche Zahlenpaare.

## Kinder

Kinder brauchen länger als manchmal angenommen, um z.B. die relativ einfachen natürlichen Zahlen begrifflich zu erfassen. Zum Zahlen Begreifen gehört mehr als Zahlennamen kennen und Zahlzeichen schreiben können. Zahlen begreifen ist mehr als die Zahlwortreihe aufsagen können und dabei einzelne Elemente nummerierend zählen. Erst wenn Zahlen frei von konkreter Bindung bzw. übertragbar auf beliebige Situationen und Materialien werden, dann werden Zahlen zu Begriffen. Dies gelingt nur in umfangreichen materialintensiven Lernsituationen.

Wesentlich höher sind die Hürden bei Zahlverhältnissen und verhältnisgleichen Zahlenpaaren. Während der Formerhalt bei proportionalen Verkleinerungen und Vergrößerungen schon vor der Schulzeit

erkannt werden kann, ist die zahlenmäßige Beschreibung der Vergrößerungen und Verkleinerungen erst später einsichtig zu machen.

Zumutbar und auch wünschenswert für die Grundschule ist die Reflexion von absoluten und relativen Restwerten. Sie ist schwierig, darf aber deshalb in der Grundschule nicht unbehandelt bleiben und auf ein späteres Alter verschoben werden. Mit dem Älterwerden ist nicht zwangsläufig ein Kompetenzzuwachs verbunden. Auch Fragestellungen wie diese sind grundschuladäquat:

*„In einer Klasse mit 24 Kindern sind sechs Nichtschwimmer, in einer anderen Klasse mit 28 Kindern können sieben nicht schwimmen. In welcher Klasse sind es mehr Nichtschwimmer?“*

Was heißt hier mehr? – Absolut betrachtet sind sieben Nichtschwimmer mehr als sechs Nichtschwimmer; aber relativ gesehen muss auch die größere Anzahl der Kinder in der Klasse beachtet werden! Relativ gesehen ist in jeder Klasse der Anteil von Nichtschwimmern gleich groß: Der vierte Teil der Kinder kann nicht schwimmen!

## Lehrerinnen und Lehrer

Was Lehrerinnen und Lehrer heute alles leisten sollen, ist fast nicht mehr leistbar. Die administrativen Vorschriften stehen in krassem Widerspruch zu kindgemäßem und erfolgreichem Lernen. Die Anforderungen von Eltern sind nicht immer realistisch. Lehrerinnen und Lehrer sind nicht für alle Bildungsmisstände verantwortlich.

Nun machen wir noch Vorschläge, die ein weiteres Aufblähen des Lernstoffkatalogs vermuten lassen?  
– Das ist keinesfalls so!

Mit unseren Anregungen wollen wir helfen, dass Kinder erfolgreicher Mathematik lernen. Das ist heute nicht immer so. Man hat den Eindruck, dass Kinder mit dem, was sie in der Schule lernen, nicht viel anfangen können. Der Anwendungsbezug fehlt und die Flexibilität in operativen Zusammenhängen scheint abhanden gekommen zu sein. Besonders deutlich werden diese Mängel beim Lösen von Sachaufgaben. In den normalen Lernangeboten fehlen ständig wechselnde Bezüge zwischen Abstraktion und Interpretation. Es fehlt der Mut, eigenständige Lösungsversuche probieren zu lassen. Kurzum: Elemente heuristischen Denkens kommen im alltäglichen Mathematikunterricht zu kurz. Der unnötige übertriebene Leistungsvergleich bindet sehr viel Unterrichtszeit; er müsste auf das Notwendige begrenzt werden. Wenn man an neu eingesäten Grashalmen ständig herumzupfen würde, würden sie auch nicht schneller wachsen. Zu viel Zeit wird auch für rein nachahmendes Üben verschwendet, das für die intellektuelle Entwicklung der Kinder nicht zielführend ist. Phasen mechanisierenden Übens müssen angereichert werden durch strukturelle Erweiterungen, die in ihrer Vertiefung mehr zum Behalten von Gelerntem beitragen.

In zahlreichen Versuchen an den verschiedensten Standorten hat sich uns immer wieder bestätigt, dass Zeit eigentlich ausreichend vorhanden wäre, um andere Schwerpunktsetzungen im Unterricht zu realisieren. Unser Buch soll für diese Zielrichtung eine Hilfe sein:

- Klar durchgliederte Aufgabenstellungen als Ausgangspunkt für vertiefendes Arbeiten halten die Vorbereitungszeit auf den Unterricht kurz.
- Verständliche Zielangaben lassen deutlich werden, worauf es bei den Aufgaben ankommt.
- Präzise Kopiervorlagen im Graustufencharakter halten die Kosten gering und helfen, nach unterschiedlichen Anforderungsaspekten die Kinder zu fordern.
- An der linken Seite jeder Kopiervorlage sind Piktogramme zu sehen, die angeben, welche instrumentellen Lernziele über die inhaltlichen Schwerpunkte hinaus mit der Bearbeitung verfolgt werden.

Unser Buch muss nicht unbedingt kapitelweise nacheinander bearbeitet werden. Die einzelnen Aufgabenstellungen können auch in anderer Reihenfolge angegangen werden. Unter dem Bearbeitungsabschnitt „Vorbereitungen“ wird angegeben, welche Voraussetzungen notwendig sind.

## Lernziele

Wissenschaftler aus aller Welt arbeiten im Auftrag der OECD an einer Sammlung von Gesetzen und Handreichungen für die Schulbildung der nächsten Generation. Dabei zeichnen sich folgende Einstellungen und Forderungen als instrumentelle Lernziele ab:

*Das Problem-Lösen lernen, anstatt gelöste Probleme oder Problemlösungen lehren.*

*Zur Urteilsfähigkeit bilden, im Hinblick auf sich selbst und auf die Lebenssituation.*

*Schüler unterrichten statt Fächer abarbeiten!*

*Wissensvermittlung abspecken, denn Lernen lernen und Können lernen kosten Zeit.*

Instrumentelle Lernziele sind bei uns Kern eines integrierten Lernens, eines Lernens, das die Wechselbezüge von Interpretation und Abstraktion beachtet und strukturelle Zusammenhänge über vorgegebene Schemata stellt.

Im Einzelnen sind die Ziele integrierten Lernens:



### **Herausforderungen annehmen,**

d. h. anfangen wollen und Zugänge suchen

Erfolgreiches Lernen beginnt mit der Bereitschaft, sich einer Aufgabe stellen zu wollen. Die Ermunterung zur Fragestellung und die Gewissheit, bei Fehlversuchen Hilfen zu erhalten, wirken sich positiv auf die Zugangsbereitschaft aus. Je weniger einengende Vorgaben gemacht werden, desto freier kann jeder sich der Herausforderung stellen. Trotzdem sind manchmal für den Einstieg ermunternde Impulse notwendig.



### **Vorgaben berücksichtigen,**

d. h. vorgegebene Einschränkungen beachten

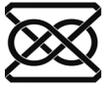
Vorgaben engen die Bearbeitung zwar ein, können aber auch wertvolle Hilfe zur Lösung sein. Die Berücksichtigung von Vorgaben ist nicht immer gleichzusetzen mit unreflektierter Anpassung. Sie kann auch diszipliniertes Vorgehen schulen. Vorgaben sind wie Spielregeln, die man in freier Entscheidung akzeptieren kann. Werden Spielregeln ignoriert, ist man aus dem Spiel heraus.



### **Informationen auswerten,**

d. h. fragen, was gemeint sein könnte

Informationen verraten auf den ersten Blick meist nicht den vollen Umfang ihrer Aussage. Es ist ratsam zu fragen, was mit einer Information gemeint sein könnte. Informationen müssen entschlüsselt werden. Das führt aus der Begrenzung individueller Betrachtungsweise heraus. Informationen sollten auch zu Fragestellungen anregen, die helfen, den Zusammenhang zu erschließen. Durch ihre Anordnung können Informationen auch zu einem Richtungswechsel der Betrachtung auffordern. Informationsauswertung fördert Wahrnehmungsvermögen.



### **Lösungswege variieren,**

d. h. Wege zur Lösung suchen und ggf. verwerfen

Flexibles Lösungsverhalten ist nicht an bestimmte Schemata und Muster gebunden. Es befähigt, Aufgaben probierend umzustellen, wenn die Lösung noch nicht deutlich ist. Flexibles Lösungsverhalten lässt auch dann noch nach anderen Wegen suchen, wenn bereits eine richtige Lösung vorliegt. Flexibles Lösungsverhalten schließt Kontrollen durch Vergleich oder Rückgriff auf konkrete Materialien ebenso ein wie vorausschauendes Bilden von Hypothesen und Strategien.



### **Strukturen entdecken,**

d. h. übergeordnete Muster als Kern herauslösen

Eine einzige konkrete Handlung zu einem Sachverhalt kann den Sachverhalt selbst nur unzureichend abbilden; es entsteht allenfalls eine starre assoziative Bindung. Erst der Vergleich mehrerer ähnlicher Handlungen zu demselben Sachverhalt macht das Gemeinsame der Handlungen deutlich, ungeachtet ihrer jeweiligen spezifischen Ausgestaltung.



### **Unterschiedliches aufeinander beziehen,**

d. h. interpretieren und abstrahieren

Bildhafte Repräsentationen lassen sich interpretieren als Momentaufnahme einer umfassenden konkreten Handlung. Sie können aber auch verbal beschrieben werden. Außerdem können Teilaspekte von bildhaften Repräsentationen in Symbolen abstrakt dargestellt werden. Das gilt sinngemäß auch für konkrete Handlungen und symbolisierte Vorstellungen. Die Wechselprozesse von Interpretation und Abstraktion trainieren die Fähigkeit, sinngemäß zu deuten bzw. Wesentliches von Einmaligem zu trennen.



### **Organisationszusammenhänge beachten,**

Operation und Gegenoperation verbinden

In üblichen Rechenaufgaben ist sowohl die Verknüpfungsart als auch die Anordnung der Zahlen festgelegt. Wird diese Festlegung aufgehoben, können die Zahlen beliebig aufeinander bezogen werden. Gegebenes und Gesuchtes können ausgetauscht werden; damit wechselt die Leerstelle und die Aufgabenstellungen variieren. Der Überblick wird gefördert und damit Analogiebildung und vorteilhaftes Operieren. Operation und Gegenoperation werden aufeinander bezogen und nicht zeitlich voneinander getrennt behandelt.

## Entdeckungsreisen

Entdeckungsreisen beschreiben handlungsorientiert, welchen neuen Lerninhalten man auf welchen Lernwegen begegnet.



### Reisen

Wer eine Reise unternimmt, verlässt seinen Standort. Er will etwas Neues erkunden und erleben, er will sich anderen Dingen öffnen und in seine bisherigen Erfahrungen einbinden.



### Orientierung

Stationen und Besonderheiten der Reise

Bei einer umfangreicheren Reise kann es sein, dass sie aus mehreren Etappen besteht. Es werden verschiedene Stationen mit unterschiedlichen Anforderungen angesteuert und dementsprechend unterschiedlich bearbeitet.



### Vorbereitungen

Voraussetzungen und Bereitstellungen

Es ist hilfreich, wenn man eine Reise gut vorbereitet. Was muss erledigt werden, um die Reise überhaupt antreten zu können? Was muss man, will man mitnehmen? Welche Informationen stehen zur Verfügung?



### Los geht's

Aufgaben zum Bearbeiten

Der Startschuss ist gegeben, wie es aber im Einzelnen weitergeht, ist nicht immer sicher: Kinder können immer wieder interessante neue Dinge nebenbei entdecken.



### Erinnerungen

Rückblick und Ausblick

Die Reise mit all ihren Eindrücken wird nicht immer umfassend erinnert. Aber die eine oder andere Besonderheit ist bei verschiedenen Kindern bestimmt noch wiederherstellbar. Was war für den Einzelnen bedeutsam? Wo waren wir? Was haben wir dort bearbeitet, evtl. auch gelernt? Wo gab es Schwierigkeiten und wo bestehen diese jetzt noch?

Welche Vorgaben mussten eingehalten werden? Bei Vorgaben ist es wie bei Spielregeln: Wer sich nicht daran hält, ist aus dem Spiel. Meistens geht es bei den Vorgaben um Absprachen, in seltenen Fällen auch um logisch begründete Voraussetzungen.



# Malnehmen und Teilen

## 1.1 Modelle zum Malnehmen und Teilen

### Orientierung



#### Trimino (*T-Shirt*) Spiel zum Malnehmen und Teilen

Malnehmen und Teilen sind Operationen des Zusammenlegens und Zerlegens: Eine Zahl mehrfach nacheinander addieren, bedeutet Malnehmen, eine Zahl mehrfach von einer vorgegeben Zahl subtrahieren, bedeutet Teilen. Das Zusammenspiel von Operation und Gegenoperation ist Ziel dieses Spiels.

### Vorbereitungen



*Kopiervorlagen 1-4*

*Plättchen, um Aufgaben zu legen bzw. zu kontrollieren*

- Aufgaben aus dem kleinen 1x1 wie 3·4 sollten immer in ihrem strukturellen Zusammenhang gesehen werden. Mit einer Aufgabe nennen die Kinder auch die übrigen, die zur Familie gehören.

$$3 \cdot 4 = 12$$

$$12 : 3 = 4 \quad \text{und} \quad 12 : 4 = 3$$

12 ist teilbar durch 3 und 4  
zu 12 passt die Malaufgabe 3 · 4

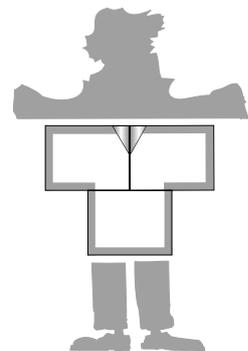
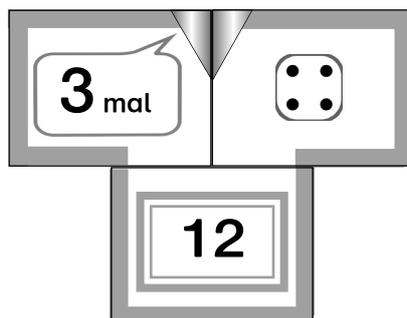
- Mit den Handknöcheln beider Hände gleichzeitig rhythmisch Malaufgaben klopfen: *Zunächst viermal klopfen, Pause, viermal klopfen, Pause, viermal klopfen – das war 3 · 4!*



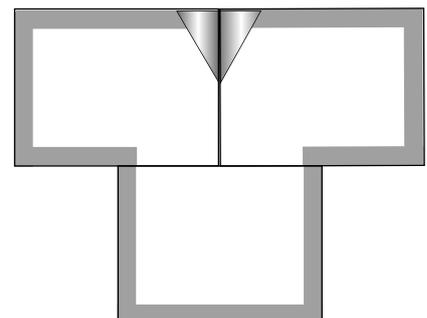
### Los geht's



- Alle Karten der *Kopiervorlage 1* ausschneiden und sortieren: linker Ärmel mit Kragenecke rechts zur Mitte, rechter Ärmel mit Kragenecke links zur Mitte, Unterteil (*T-Shirt*)
- 3 Karten suchen, die eine Malaufgabe darstellen



- Gefundene Trminos (*T-Shirts*) werden auf der *Kopiervorlage 2* notiert, dann können die benutzten Karten wieder zurückgelegt werden. Anschließend werden die dazu passenden vier Zahlensätze ins Heft geschrieben (*siehe grau unterlegter Kasten oben*).





# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Kinder entdecken Bruchzahlen....*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)

