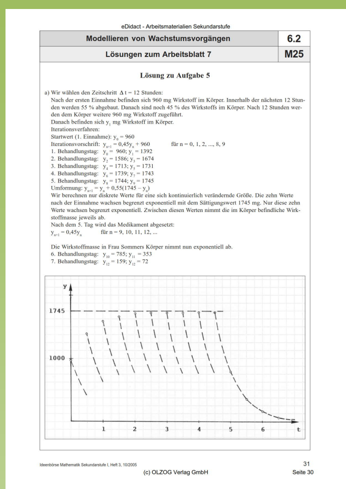
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Modellieren von Wachstumsvorgängen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



eDidact - Arbeitsmaterialien Sekundarstufe

Modellieren von Wachstumsvorgängen	6.2
Lösungen zum Arbeitsblatt 7	M25

Lösung zu Aufgabe 5

a) Wir wählen den Zeitschritt $\Delta t = 12$ Stunden:
Nach der ersten Einnahme befinden sich 960 mg Wirkstoff im Körper. Innerhalb der nächsten 12 Stunden werden 55 % abgebaut. Danach sind noch 45 % des Wirkstoffs im Körper. Nach 12 Stunden werden dem Körper weitere 960 mg Wirkstoff zugeführt.
Danach befinden sich y_1 mg Wirkstoff im Körper.
Iterationsverfahren:
Startwert (1. Einnahme): $y_0 = 960$
Iterationsvorschrift: $y_{n+1} = 0{,}45y_n + 960$ für n = 0, 1, 2, ..., 8, 9
1. Behandlungstag: $y_0 = 960$; $y_1 = 1392$
2. Behandlungstag: $y_2 = 1586$; $y_3 = 1674$
3. Behandlungstag: $y_4 = 1713$; $y_5 = 1731$
4. Behandlungstag: $y_6 = 1739$; $y_7 = 1743$
5. Behandlungstag: $y_8 = 1744$; $y_9 = 1745$
Umformung: $y_{n+1} = y_n + 0{,}55(1745 - y_n)$
Wir berechnen nur diskrete Werte für eine sich kontinuierlich verändernde Größe. Die zehn Werte nach der Einnahme wachsen begrenzt exponentiell mit dem Sättigungswert 1745 mg. Nur diese zehn Werte wachsen begrenzt exponentiell. Zwischen diesen Werten nimmt die im Körper befindliche Wirkstoffmasse jeweils ab.
Nach dem 5. Tag wird das Medikament abgesetzt:
$y_{n+1} = 0{,}45y_n$ für n = 9, 10, 11, 12, ...

Die Wirkstoffmasse in Frau Sommers Körper nimmt nun exponentiell ab.
6. Behandlungstag: $y_{10} = 785$; $y_{11} = 353$
7. Behandlungstag: $y_{12} = 159$; $y_{12} = 72$

Modellieren von Wachstumsvorgängen | 6.2

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler erfahren, dass ein Modell eine vereinfachte Darstellung des Ablaufs eines realen Sachverhalts sein kann, die eine Untersuchung erleichtert oder erst ermöglicht.*
- *Sie erleben, dass ein mathematisches Modell nützlich sein kann, einen zwar bekannten, aber schwer durchschaubaren alltäglichen Sachverhalt besser zu verstehen.*
- *Sie erfahren, dass Modellrechnungen auch dazu benützt werden, Prognosen über zukünftige Ereignisse zu erstellen. Damit geeignete mathematische Modelle geschaffen werden können, sind zuerst tiefes Sachwissen und danach mathematische Kenntnisse unverzichtbar.*
- *Sie können bei der Bearbeitung der Aufgaben Metawissen erwerben: Was sind und was sollen Modelle leisten?*

Zentrales Anliegen:

Für Mathematikunterricht ist die Leitidee **Modellieren** bei der Anwendung mathematischer Verfahren auf Sachsituationen noch nicht lange in der Diskussion. Dabei wird gelegentlich die Meinung vertreten, dieser Begriff sei im Mathematikunterricht immer dann angemessen, wenn mathematische Methoden zur Lösung einer anwendungsbezogenen Aufgabe eingesetzt werden. Beispielsweise wird dann eine lineare Funktion als „ein mathematisches Modell“ bezeichnet, wenn mit ihrer Hilfe bei bekanntem Kilopreis der Preis von 200 g Käse berechnet wird. Da hier nur eine beim Kaufvertrag festgelegte Rechenvorschrift beachtet wird, bringt der Begriff Modell den Lernenden dabei schwerlich tieferes Verständnis für die Rolle der Mathematik beim Zugriff auf Welt.

Für die Schüler können die Begriffe modellieren und Modell allerdings dann fruchtbar werden, wenn die Zusammenhänge in einem Stück realer Welt nicht mehr ohne Weiteres zu durchschauen sind. Dann ist es angemessen und nützlich, wenn eine **vereinfachte Darstellung** mit mathematischen Mitteln ein **mathematisches Modell** genannt wird. Diese Begriffsbildung betont und erinnert dann daran, dass zwischen einem Stück realer Welt und einer verkürzten Beschreibung unterschieden werden muss. Schüler sollen das Modellieren als ein in der Wissenschaft bedeutungsvolles Verfahren kennen lernen, das für Lernende nicht dadurch entwertet wird, dass „mathematisches Modell“ für sie zu einem allgegenwärtigen und damit inhaltsleeren Modewort verkommt. Dies schließt nicht aus, dass „Modellieren“ zur Strukturierung eines Bildungsplans für Lehrende umfassender eingesetzt wird.

In der Umgangssprache hat das Wort Modell sehr viele unterschiedliche Bedeutungen. Auch in der Schulmathematik hat der Begriff nicht nur eine Bedeutung. Es seien nur Drahtmodelle für Körper und Kurven, in sechs volumengleiche Pyramiden zerlegbare Würfelmodelle, aber auch Urnenmodelle der Stochastik oder Kleinsche Modelle für nichteuklidische Geometrien genannt. Vor einigen Jahren war „modellieren“ in der „Neuen Mathematik“ ein Schlüsselbegriff: Für ein Axiomensystem sollte eine konkrete Realisierung gefunden werden. Die Menge der Deckabbildungen eines Quadrates ist mit dem Verketten als Verknüpfung eine achtelementige endliche Gruppe. Sie wurde (für Schüler fragwürdigerweise) auch ein Modell der Gruppentheorie genannt.

Der vorliegende Beitrag handelt von **deskriptiven mathematischen Modellen**. Dabei geht es darum, ein Stück reale Welt vereinfacht und idealisiert mit mathematischen Mitteln zu beschreiben. Es geht nicht darum, im täglichen Leben vorgeschriebene Rechenverfahren zu benutzen, sondern angestrebt wird, ein komplexes Stück realer Welt durch etwas Gedachtes wenigstens näherungsweise zu erfassen. Zentrales Ziel ist, dass Schüler befähigt werden, mathematisches Modellieren angemessen zu bewerten. Dazu gehört nicht nur, Grenzen wahrzunehmen, sondern auch die Bedeutung dieses nicht nur in den Naturwissenschaften unverzichtbaren Verfahrens kennen zu lernen.

6.2	Modellieren von Wachstumsvorgängen

Vorüberlegungen

Ausgehend von einer Erfahrung mit einem Stück realer Welt kann ein mathematisches Modell aufgebaut werden, um damit zukünftige Entwicklungen zu berechnen. Nach korrekter Rechnung sind solche Prognosen im Modell **wahr**. Ob die Prognosen auch in der zukünftigen realen Situation **gültig** sind, ist noch offen. Dies muss zu gegebener Zeit eigens durch angemessene Beobachtungen geprüft werden. Stets muss im Blick bleiben:

- Es gibt die reale Welt.
- Es gibt Modelle von der Welt.

Beim Arbeiten mit mathematischen Modellen genügt mathematisches Wissen allein nicht. Es bedarf unbedingt einer hinreichend subtilen Kenntnis des realen Sachverhaltes. Da es die knappe Unterrichtszeit nicht erlaubt, dass sich Schüler zuerst in ihnen fremde Sachzusammenhänge hinreichend einarbeiten, benötigen wir Beispiele aus alltäglichen außerschulischen Erfahrungsbereichen der Schüler. Dass dabei echte Daten benutzt werden, ist selbstverständlich.

Da bei diesem Unterrichtsvorschlag Wissen **über** die Mathematik ein besonderes Anliegen ist, seien die entsprechenden Punkte noch einmal besonders herausgestellt:

Was sind Modelle?

- Modelle sind **Modelle von etwas**, von realen oder gedachten Originalen. Sie können gedankliche Konstruktionen von realen oder gedachten Gegenständen oder Vorgängen sein.
- Modelle **reduzieren**. Sie erfassen nicht alle Attribute des zu repräsentierenden Originals. Deshalb sind sie einfacher als die Realität. Gelingt die Vereinfachung auf wesentliche Grundsachverhalte, dann erleichtert oder ermöglicht ein Modell Einblicke in Tatbestände, die sonst der Einsicht verborgen sein können.
- Modelle **akzentuieren**, sie heben einzelne Teile der Gesamtsituation hervor. Das bedeutet auch, dass andere Aspekte entsprechend vernachlässigt werden. Beispielsweise wenden wir unser Augenmerk bei medikamentösen Therapien auf die Spitzenwerte der Wirkstoffmenge im Körper eines Patienten. Dann sind uns denkbare unangenehme Nebenwirkungen bei zu hohen Wirkstoffmengen besonders wichtig. Bei einer medikamentösen Therapie ist allerdings auch bedeutungsvoll, ob genügend Wirkstoff im Patientenkörper ist, um wirksam zu werden.
- Modelle **sind vorläufig** – sie können als Hilfskonstruktionen auf dem Weg zu komplexeren Modellen angesehen werden, welche reale Gegebenheiten der Welt genauer beschreiben.
- Das zentrale Problem*:* Modelle erfassen **nur diejenigen Attribute** des zu repräsentierenden Originals, die dem Modellbenutzer **relevant erscheinen**. Überdies setzt dieser bei der Konstruktion des Modells auch nur die mathematischen Methoden ein, die ihm zur Verfügung stehen. Schon deshalb muss das Augenmerk auf das **zentrale Problem** einer Modellierung gerichtet werden: Ist das Modell **gültig**? **Passt** das Modell zu dem zu erfassenden Sachverhalt? Diese Frage lässt sich allerdings mit mathematischem Sachverstand allein nicht beantworten, hierzu bedarf es einer hinreichend subtilen Kenntnis des zu modellierenden realen Sachverhaltes.

Was können Modelle leisten?

Hier beschränken wir uns auf zwei wichtige Aspekte.

- Sie werden benutzt, **Prognosen** für zukünftige Ereignisse zu treffen.
- Sie können helfen, **Erklärungen** bei schwer durchschaubaren realen Zusammenhängen zu finden.

Modellieren von Wachstumsvorgängen — 6.2

Vorüberlegungen

Einordnung:

Eine günstige Gelegenheit, in der Sekundarstufe I von Modellen zu sprechen, ist die Behandlung von Wachstumsprozessen. Um die vorliegenden Aufgaben erfolgreich angehen zu können, sollten die Schüler schon erste Erfahrungen mit linearem, exponentiellem, begrenztem exponentiellem und mit Abstrichen auch mit logistischem Wachstum gemacht haben. Weitere Kenntnisse können bei der Arbeit mit den Aufgaben erworben werden. Damit Schüler über Reichweite und Begrenzung mathematischen Modellierens angemessen nachdenken können, sollten sie mit den Rechenverfahren keine ernsten Probleme haben.
Die Aufgaben sind auch eine empfehlenswerte Vorbereitung auf die Differenzialgleichungen

$\dot{y} = k$ für lineares Wachstum,

$\dot{y} = ky$ für exponentielles Wachstum,

$\dot{y} = k(S - y)$ für begrenztes exponentielles Wachstum,

$\dot{y} = ky(S - y)$ für logistisches Wachstum.

Es werden **fünf Aufgaben** (**M2 bis M8**) angeboten.
Da diese umfangreich sind, bieten sich **kooperative Arbeitsformen** an. In den Aufgaben 2 und 4 vertreten einige Personen verschiedene Modelle zum gleichen Geschehen. Diese können günstig in **Rollenspielen** der Klasse vorgestellt werden. In den einzelnen Modellen kann danach in kurzen Vorträgen gerechnet und die Gültigkeit der Ergebnisse kommentiert werden. Damit es nicht nur leistungsstarken Schülern möglich ist, weitgehend selbstständig erfolgreich zu arbeiten, sind die **Lösungsblätter** (**M9 bis M28**) sehr ausführlich gehalten. Auf einer Seite der **Materialien** (**M1**) wird benötigtes mathematisches Grundwissen zu vier einfachen Wachstumsvorgängen zusammengefasst.

Die einzelnen Aufgaben im Überblick:

Aufgabe 1: In der Bank
Wir vergleichen zwei Anlageformen bei einer Bank.
Arbeitsblatt 1 (**M2**)

Aufgabe 2: Prognosen zum Stromverbrauch
Welche Forderungen sind an Modelle zu stellen, falls sie benutzt werden, Prognosen für zukünftige Entwicklungen abzugeben?
Arbeitsblätter 2 und 3 (**M3** und **M4**)

Aufgabe 3: Zum Wachsen einer Stangenbohne
Mathematische Modelle können helfen, biologische Erklärungen zu formulieren.
Wird logistisches Wachstum in diskreter Weise behandelt, dann beeinflusst die Wahl des Zeitschrittes die Rechenergebnisse.
Arbeitsblätter 4 und 5 (**M5** und **M6**)

Aufgabe 4: Verkaufserwartungen
Es sollen über die Entwicklung von Verkaufszahlen Prognosen abgegeben werden.
Arbeitsblatt 6 (**M7**)

Aufgabe 5: Eine medikamentöse Therapie
Ärztliche Anweisungen sind für Schüler oft zwar vertraute, aber undurchschaubare Alltagserfahrungen. Hier kann mathematisches Modellieren Verständnis schaffen.
Arbeitsblatt 7 (**M8**)

Die Aufgaben sind voneinander unabhängig. Es kann der Klassensituation angemessen sein, nur einzelne Aufgaben oder auch nur Teile der umfangreichen Aufgaben auszuwählen.

Unterrichtsplanung

1. Aufgabe: In der Bank

Wir vergleichen zwei Sparverträge (**Arbeitsblatt 1**, **M2**; **Lösungen** s. **M9**). Im Vertrag zwischen dem Kunden und der Bank werden Rechenvorschriften zur Zinsenberechnung vereinbart, die zu einem eindeutigen Ergebnis führen. Werden diese Rechnungen ausgeführt, dann wird nicht in einem Modell von etwas gerechnet, auch ist diese Rechnung kein Modell von etwas, es ist das Etwas.

Allenfalls kann die Zinseszinsformel als ein mathematisches Modell bezeichnet werden. Mit ihr wird vereinfacht, denn wird sie herangezogen, wird von den erforderlichen jährlichen Zwischenrechnungen abgesehen. Dann wird aber nicht beachtet, dass die jährlichen Zinsen jeweils auf ganze Cent gerundet werden müssen. Die Rechnung mit der Zinseszinsformel kann allerdings auch schlicht eine **gute Näherungsrechnung** genannt werden.

2. Aufgabe: Prognosen zum Stromverbrauch

Schüler erfahren am Beispiel, dass ohne inhaltliche Sachkenntnisse keine mathematischen Modelle geschaffen werden können, die ernst zu nehmende Prognosen zulassen.
Es sollen Prognosen über den zukünftigen Stromverbrauch in Baden-Württemberg abgegeben werden (**Arbeitsblätter 2 und 3**, **M3 und M4**; **Lösungen** s. **M10 bis M15**). Es ist offensichtlich, dass verlässliche Prognosen über zukünftigen Strombedarf dringend erforderlich sind, denn Planung und Fertigstellung neuer Kraftwerke erfordern Jahre.
Solche Prognosen entstehen im Allgemeinen folgendermaßen: Fachleute kennen viele Einflussfaktoren auf den Stromverbrauch. Aufgrund der Entwicklung dieser Faktoren in den letzten Jahren werden für jeden dieser Einflüsse zu erwartende Änderungen abgeschätzt. Danach wird auf den zu erwartenden Stromverbrauch geschlossen. Dabei sind mathematische Methoden unverzichtbare Hilfsmittel. Arbeitshypothese ist: Beobachtete Entwicklungen bekannter Einflüsse werden sich noch einige Zeit fortsetzen. Kurzfristige Prognosen werden so mit verhältnismäßig großer Sicherheit möglich. Allerdings können unerwartete Ereignisse immer zu anderen realen Entwicklungen führen.

Im 1. Teil der Aufgabe werden für das Jahr 1980 und im 2. Teil für das Jahr 1990 aufgrund alter Daten mathematische Modelle erstellt. Weil die handelnden Personen über keine Sachkenntnis verfügen, legen sie folgende **Arbeitshypothese** zugrunde: Ein bestehender rechnerischer Zusammenhang zwischen den bekannten alten Daten bleibt lange Zeit bestehen.
Um einen rechnerischen Zusammenhang zu finden, werden nur einfache Wachstumsformen betrachtet. So werden mathematische Modelle ohne inhaltliches Sachwissen und damit ohne Beachtung von Einflussfaktoren gebildet. Dass dies in die Irre gehen muss, wird schon dann offensichtlich, wenn zur Kenntnis genommen wird, dass es zu wenigen vorgegebenen Daten unterschiedliche rechnerische Zusammenhänge gibt. Die wenigen vorgegebenen Daten können schon dann in unterschiedliche mathematische Modelle eingepasst werden, wenn nur einfache Wachstumsformen zugelassen sind.

Die so zu Stande gekommenen Prognosen können aus heutiger Sicht bewertet werden. Dabei erleben Schüler, dass bei diesem Verfahren gelegentlich durchaus ordentliche Prognosen entstehen. Sie erfahren aber auch, dass solche Prognosen völlig wertlos sein können. Dann sind sie aber letztlich alle wertlos. Ohne Kenntnis der Sachzusammenhänge ist mathematisches Modellieren nicht geeignet, Prognosen über zukünftige Entwicklungen in der Welt abzugeben.

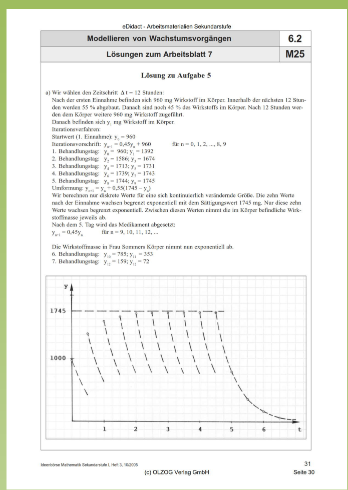
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Modellieren von Wachstumsvorgängen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



eDidact - Arbeitsmaterialien Sekundarstufe

Modellieren von Wachstumsvorgängen	6.2
Lösungen zum Arbeitsblatt 7	M25

Lösung zu Aufgabe 5

a) Wir wählen den Zeitschritt $\Delta t = 12$ Stunden:
Nach der ersten Einnahme befinden sich 960 mg Wirkstoff im Körper. Innerhalb der nächsten 12 Stunden werden 55 % abgebaut. Danach sind noch 45 % des Wirkstoffs im Körper. Nach 12 Stunden werden dem Körper weitere 960 mg Wirkstoff zugeführt.
Danach befinden sich y_1 mg Wirkstoff im Körper.
Iterationsverfahren:
Startwert (1. Einnahme): $y_0 = 960$
Iterationsvorschrift: $y_{n+1} = 0{,}45y_n + 960$ für n = 0, 1, 2, ..., 8, 9
1. Behandlungstag: $y_0 = 960$; $y_1 = 1392$
2. Behandlungstag: $y_2 = 1586$; $y_3 = 1674$
3. Behandlungstag: $y_4 = 1713$; $y_5 = 1731$
4. Behandlungstag: $y_6 = 1739$; $y_7 = 1743$
5. Behandlungstag: $y_8 = 1744$; $y_9 = 1745$
Umformung: $y_{n+1} = y_n + 0{,}55(1745 - y_n)$
Wir berechnen nur diskrete Werte für eine sich kontinuierlich verändernde Größe. Die zehn Werte nach der Einnahme wachsen begrenzt exponentiell mit dem Sättigungswert 1745 mg. Nur diese zehn Werte wachsen begrenzt exponentiell. Zwischen diesen Werten nimmt die im Körper befindliche Wirkstoffmasse jeweils ab.
Nach dem 5. Tag wird das Medikament abgesetzt:
$y_{n+1} = 0{,}45y_n$ für n = 9, 10, 11, 12, ...

Die Wirkstoffmasse in Frau Sommers Körper nimmt nun exponentiell ab.
6. Behandlungstag: $y_{10} = 785$; $y_{11} = 353$
7. Behandlungstag: $y_{12} = 159$; $y_{12} = 72$