

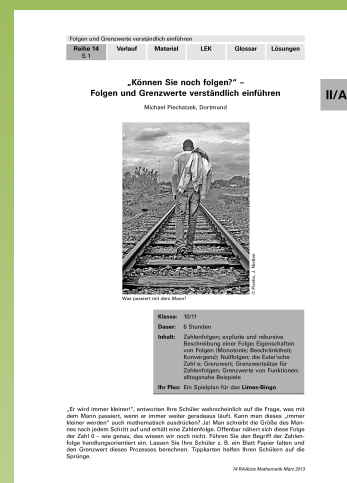
# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus: "Können Sie noch folgen?"

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)



## „Können Sie noch folgen?“ – Folgen und Grenzwerte verständlich einführen

Michael Piechatzek, Dortmund

II/A



© Pixelio, J. Nießen

Was passiert mit dem Mann?

**Klasse:** 10/11

**Dauer:** 6 Stunden

**Inhalt:** Zahlenfolgen; explizite und rekursive Beschreibung einer Folge; Eigenschaften von Folgen (Monotonie; Beschränktheit; Konvergenz); Nullfolgen; die Euler'sche Zahl  $e$ ; Grenzwert; Grenzwertsätze für Zahlenfolgen; Grenzwerte von Funktionen; alltagsnahe Beispiele

**Ihr Plus:** Ein Spielplan für das **Limes-Bingo**

„Er wird immer kleiner!“, antworten Ihre Schüler wahrscheinlich auf die Frage, was mit dem Mann passiert, wenn er immer weiter geradeaus läuft. Kann man dieses „immer kleiner werden“ auch mathematisch ausdrücken? Ja! Man schreibt die Größe des Mannes nach jedem Schritt auf und erhält eine Zahlenfolge. Offenbar nähert sich diese Folge der Zahl 0 – wie genau, das wissen wir noch nicht. Führen Sie den Begriff der Zahlenfolge handlungsorientiert ein. Lassen Sie Ihre Schüler z. B. ein Blatt Papier falten und den Grenzwert dieses Prozesses berechnen. Tippkarten helfen Ihren Schülern auf die Sprünge.

## Didaktisch-methodische Hinweise

### Den Begriff der Folge einführen

Viele alltägliche Problemstellungen lassen sich mithilfe der Mathematik beschreiben. So kann man Folgen nutzen, um etwa den Gang des jungen Mannes auf dem Titelfoto mathematisch zu modellieren.

Lassen Sie die Schüler zunächst überlegen, welche Rolle Zahlenfolgen in ihrem **Alltag** spielen. Wenn man sich beispielsweise das Jahr über aufgeschrieben hat, welche Noten man in den Tests und Klassenarbeiten hatte, kann man am Jahresende aus der Zahlenfolge eine (hoffentlich positive!) Entwicklung ablesen. Bei physikalischen Experimenten notiert man meist **Messreihen** – das sind Folgen, die angeben, welchen Wert eine Messgröße zu einem bestimmten Zeitpunkt hatte. Folgen können **Wachstums-** und **Dezimirungsprozesse** beschreiben – und zwar in ganz unterschiedlichen Bereichen.

Eine mathematische Fassung des Wortes „Folge“ hilft den Schülern, zu erkennen, dass all diesen Beispielen das gleiche Phänomen zugrunde liegt.

#### Definition 1:

Eine **Folge** ist eine Abbildung mit der Definitionsmenge  $\mathbb{N}_0$ . Wir verwenden für eine Folge die Bezeichnung:

$$n \rightarrow a_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

oder kurz  $(a_n)$ . Die einzelnen  $a_n$  heißen Folgenglieder.

Bei den **Grenzwertbetrachtungen** führen Sie einen weiteren abstrakten Begriff ein: „unendlich“ (geschrieben:  $\infty$ ). Die Schüler lernen, dass unendliche Zahlenfolgen einen Grenzwert haben können.

### Notwendige Vorkenntnisse

Elementare Termumformungen führen Ihre Schüler souverän durch. Dazu gehören die binomischen Formeln, die Potenz- und Wurzelgesetze sowie das korrekte Ausklammern. Außerdem benötigt man in M 2, Aufgabe 2 die **geometrische Reihe**:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k; \quad q \in \mathbb{R}, \neq 1 \Rightarrow s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\text{Beispiel: } q = 4: \sum_{k=1}^n 4^{k-1} = \frac{1 - 4^n}{1 - 4} = \frac{4^n - 1}{3}$$

### Ablauf

Der Einstieg in die Thematik erfolgt über alltagsnahe Beispiele. Die Schüler modellieren Folgen zu Sachverhalten und umgekehrt. Handlungsorientiert nähern sich Ihre Schüler dem mathematischen Folgenbegriff. Dazu falten sie einen Bogen Papier, färben Flächen ein und betrachten die Folge der eingefärbten Flächeninhalte (**M 2**). **Tippkarten (M 3)** erleichtern ihnen die Arbeit und fördern eine selbstständige Auseinandersetzung mit der Problemstellung. Die Lernenden erfahren, wie einzelne Folgenglieder notiert werden. Sie stellen fest, dass ein Glied einen **Nachfolger** hat. Die Schüler müssen weiterhin angeben, ob die betrachtete Folge (**streng**) **monoton wachsend** oder **fallend** ist. Gibt es eine Zahl, der sich die Flächeninhalte nähern? Auch diese Frage schneiden Sie an.

Mit Material **M 4** führen Sie die Begriffe „**Konvergenz**“ und „**Divergenz**“ ein. Neben der leicht zu verstehenden **Nullfolge** ist auch die **Unendlichkeit** Thema dieses Materials. Der **Grenzwert** einer konvergenten Zahlenfolge für  $n \rightarrow \infty$  wird definiert. Lassen Sie Ihre Schüler einfache Grenzwerte bestimmen. Material **M 5** ist ein **Tandembogen**. Selbstständig erschließen sich Ihre Schüler mithilfe zweier Lückentexte die Bedeutung der Begriffe **Folgenglied**, **Platznummer**, **Rekursivität** und **explizite Notation**. Zusatzaufgaben sichern das Verständnis der neu gelernten Wörter.

<b>Reihe 14</b> S 3	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen</b>
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

II/A

Material **M 6** befasst sich mit der praktikablen **Bestimmung von Grenzwerten**. Die Schüler wenden elementare Rechengesetze an, um die gegebenen Terme so umzuformen, dass man den jeweiligen Grenzwert leicht ablesen kann. Mit der Bildung von Nullfolgen innerhalb eines Ausdrucks erlernen Ihre Schüler ein probates Mittel, um schnell ans Ziel zu gelangen. Außerdem müssen die Lernenden die **Grenzwertsätze** anwenden. Teilen Sie dazu die **Regelkarten (M 7)** aus. Weitere Übungen vertiefen und festigen den Stoff. Die Expertenaufgaben geben Ihnen eine Möglichkeit, innerhalb dieses Materials zu differenzieren.

Den Abschluss bildet ein Spiel: **Limes-Bingo (M 8)**. In kleinen Gruppen wiederholen die Schüler alle Erkenntnisse aus den vorangegangenen Materialien.

Beim Limes-Bingo (M 8) führen Sie, aufbauend auf dem Grenzwertbegriff für Folgen, den Grenzwertbegriff für Funktionen ein.

**Definition 2:**

Eine Zahl  $g$  heißt **Grenzwert der Funktion  $f$**  für  $x \rightarrow +\infty$  (bzw. für  $x \rightarrow -\infty$ ), wenn für jede Urbildfolge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow +\infty$  (bzw. für  $x_n \rightarrow -\infty$ ) und  $x_n \in D_f$  die Bildfolge  $(f(x_n))$  den Grenzwert  $g$  hat.

Man schreibt:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$

**Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz**

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K 3	L 1, L 4	... modellieren zu einer Alltagssituation eine Folge und umgekehrt ( <b>M 1, M 2</b> ),	II, III
K 1	L 1, L 4	... definieren den Begriff der Folge mathematisch exakt ( <b>M 5</b> ),	I, II
K 1	L 1	... wiederholen elementare Rechengesetze zur Umformung von Termen ( <b>M 6</b> ),	I
K 1	L 1	... lernen Rechengesetze zur Berechnung des Grenzwertes kennen ( <b>M 7</b> ),	I
K 1	L 1	... festigen das Gelernte mit einem Spiel ( <b>M 8</b> ).	III

**Abkürzungen**

*Kompetenzen*

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

*Leitideen*

L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

*Anforderungsbereiche*

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

## Auf einen Blick

### Einstieg: den Begriff der Zahlenfolge kennenlernen

Material	Thema	Stunde
M 1 (SW-Fo)	<b>Zahlenfolgen im Alltag</b> Eine Modellierungsaufgabe als Unterrichtseinstieg	1.
M 2	<b>Papier falten – ein einfaches Experiment zur Konvergenz</b> Handlungsorientierter Einstieg mithilfe eines Faltextperimentes	
M 3	<b>Ziel eines langen Wegs – Tipps zur Grenzwertbestimmung</b> Tippkarten zum Fallbeispiel aus M 2	

### Folgen modellieren

Material	Thema	Stunde
M 4	<b>Nullfolgen, springende Folgen; der Begriff „Grenzwert“</b> Einführung des Grenzwertes und der Nullfolge; Modellierung von Alltagssituationen mithilfe von Folgen	2.

### Begriffsdefinitionen, Grenzwertbestimmungen, Rechenregeln

Material	Thema	Stunde
M 5	<b>Exakt definiert – Tandembögen</b> Tandembögen zu wichtigen Begriffen, Übungsaufgaben	3.
M 6	<b>Ausklammern und kürzen – Grenzwerte berechnen</b> Nullfolgen erkennen; Termumformungen; Grenzwerte berechnen	4.
M 7	<b>Die Grenzwertsätze – Regelkarten</b> Rechenregeln zu Folgen kennenlernen und anwenden	5.

### Wiederholen und festigen

Material	Thema	Stunde
M 8	<b>Limes-Bingo – üben Sie Grenzwertbestimmungen!</b> Fünf Spielplanvorlagen für ein Bingo in kleinen Gruppen Übungen zur Bestimmung von Grenzwerten	6.

### Minimalplan

Je nachdem, welche Vorkenntnisse Ihre Schüler haben, können Sie den handlungsorientierten Einstieg auslassen und die Unterrichtsreihe mit M 4 beginnen.

# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus: "Können Sie noch folgen?"

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)

