



SCHOOL-SCOUT.DE

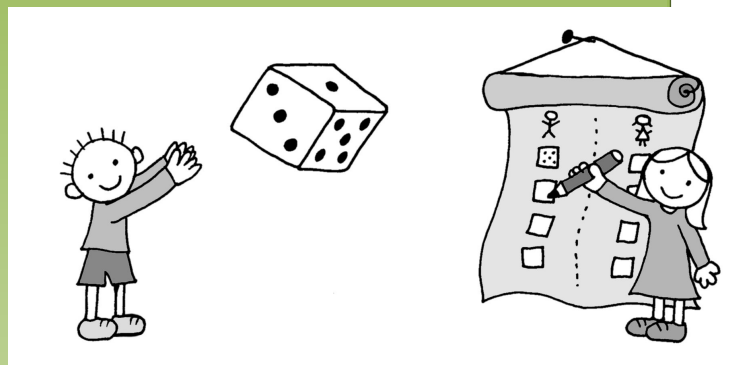
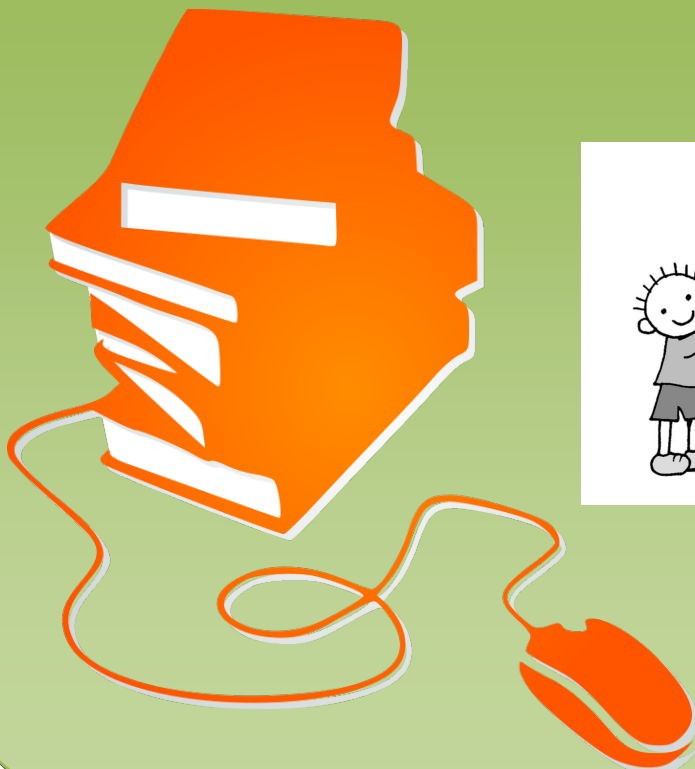
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Gut kombiniert!

Das komplette Material finden Sie hier:

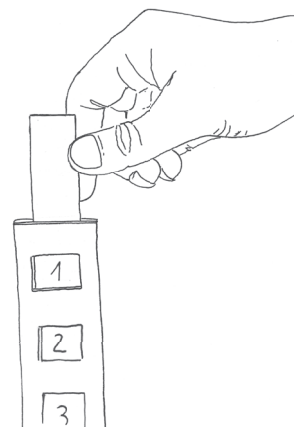
School-Scout.de



Gut kombiniert! – Wir finden und üben Lösungsstrategien für kombinatorische Aufgaben

Ein Beitrag von Sandra Kroll-Gabriel, Ingolstadt

Wie war doch gleich die Zahlenfolge von meinem Fahrradschloss? Wie kombiniere ich T-Shirt und Hose? Und welchen Blumenstrauß findet Oma wohl am schönsten? – Alles Fragen, die sich mithilfe der Kombinatorik leichter lösen lassen und die auch schon Grundschul Kinder interessant finden. Mit solchen alltagsbezogenen Situationen schafft die vorliegende Unterrichtseinheit einen motivierenden Zugang zum Thema. Ihre Schüler lernen Strategien für das Lösen kombinatorischer Aufgaben kennen, und zum Üben gibt es viele Spiele, Aufgaben und Knebelien. Eine Rechenkonferenz rundet das Thema schließlich ab.



Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Teil II



Das Wichtigste auf einen Blick

Aufbau der Unterrichtseinheit

Die Unterrichtseinheit umfasst eine Sequenz mit folgenden Phasen:

Einstieg: Wir schaffen Ordnung! – Ordnen, Sortieren, Reihen bilden

Erarbeitung 1: Probier es! – Möglichkeiten durch Ausprobieren mit Materialien finden

Erarbeitung 2: Mal es auf! – Möglichkeiten durch bildliche Darstellung finden

Übung: Gut kombiniert mit Tassen, Clowns und Zahlen! – Aufgaben an Stationen lösen

Erarbeitung 3: Verschaff dir Überblick! – Möglichkeiten im Baumdiagramm darstellen

Abschluss: Gemeinsam geht's besser! – Lösungswege in einer Rechenkonferenz suchen und besprechen

Dauer: 9 bis 10 Unterrichtsstunden

Klassen: 3 und 4

Lernbereiche: Stochastik (Kombinatorik), Sachbezogene Mathematik

Kompetenzen: Mathematische Sachsituationen erschließen; unterschiedliche Lösungsstrategien erproben; Lösungswege reflektieren und darüber sprechen

Warum dieses Thema wichtig ist

Bereits Kinder werden im täglichen Leben mit kombinatorischen Fragen konfrontiert. Hier knüpft diese Unterrichtseinheit an. Sachverhalte und Situationen aus dem Alltag werden handelnd und spielerisch bearbeitet und motivieren die Schülerinnen und Schüler¹ zum Finden und Darstellen von Möglichkeiten. Dabei gewinnen sie nicht nur erste Einsichten in die Gesetzmäßigkeiten der Kombinatorik, sie üben sich auch im logischen Denken und strategischen Problemlösen und werden zum Reflektieren und Sprechen über mathematische Zusammenhänge angeregt.

1 Im weiteren Verlauf wird aus Gründen der besseren Lesbarkeit nur „Schüler“ verwendet.

Teil II

Was Sie zu diesem Thema wissen sollten

Wie viele Möglichkeiten gibt es? – Kombinatorische Probleme

In der Kombinatorik geht es um die Frage, welche und wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, Elemente einer bestimmten Menge auszuwählen und anzuordnen. In dieser Unterrichtseinheit werden Anordnungsprobleme (Permutationen) thematisiert, Auswahlprobleme (Kombinationen und Variationen) sowie Kombinationsprobleme (Anwendung der Produktregel). Bei einigen Aufgaben gilt es außerdem zu unterscheiden, ob die Auswahl bzw. Anordnung mit oder ohne Wiederholung stattfindet. Im Folgenden finden Sie typische Fragen und Beispiele:

1. *Anordnungsprobleme (Permutationen)*: Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Elemente in verschiedenen Reihenfolgen anzuordnen?

Beispiel für ein Anordnungsproblem: Wie viele Möglichkeiten gibt es für drei Personen, auf drei Stühlen Platz zu nehmen? – Für die erste Person gibt es eine, für die zweite Person zwei und für die dritte noch eine, d. h. $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ($n!$). Die Permutationen kann man auch als Auswahl mit Reihenfolge und ohne Wiederholung betrachten (s. u.)

2. *Auswahlprobleme*: Wie viele Möglichkeiten gibt es, m Elemente aus einer Menge von n Elementen auszuwählen? Wenn dabei die Anordnung der ausgewählten Elemente berücksichtigt wird, handelt es sich um eine *Variation*, wenn nicht, um eine *Kombination*.

Beispiel für ein Auswahlproblem/Kombination (also ohne Berücksichtigung der Anordnung und in diesem Fall ohne Wiederholung): Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus vier Büchern zwei auszuwählen? – Es gibt für die erste Auswahl vier und für die zweite noch drei, d. h. $4 \cdot 3 = 12$. Da hierbei aber auch doppelte Kombinationen auftreten, muss das Ergebnis halbiert werden. Es ergeben sich daher sechs Möglichkeiten ($n! : [m! \cdot (n - m)!]$).

Beispiel für ein Auswahlproblem/Variation (also mit Berücksichtigung der Anordnung und in diesem Fall ohne Wiederholung): Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus fünf Farben zwei auszuwählen und dann unterschiedlich anzuordnen? – Es ergeben sich $5 \cdot 4 = 20$ Möglichkeiten ($n! : (n - m)!$).

3. *Kombinationsprobleme*: Wie viele Möglichkeiten gibt es, alle Elemente n einer Menge mit allen Elementen m einer anderen Menge zu kombinieren?

Beispiel für ein Kombinationsproblem: Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei Pullis mit zwei Hosen zu kombinieren? – Jeder Pulli kann mit jeder Hose kombiniert werden, d. h. die Anzahl der Elemente der beiden Mengen wird multipliziert. Es gibt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten (Produktregel).

Wie finde ich die Möglichkeiten? – Kombinatorische Lösungsstrategien

Das Finden von Auswahl- oder Anordnungsmöglichkeiten beruht auf dem „Zählprinzip“, also dem Abzählen der Möglichkeiten. Mit steigender Komplexität der Aufgaben ist hierfür ein zunehmend systematisches Vorgehen notwendig. Die Unterrichtseinheit behandelt daher Strategien mit steigendem Abstraktionsgrad – vom unstrukturierten Ausprobieren bis zum systematischen Ermitteln und strukturierten Darstellen. Nach dem Prinzip „enaktiv – ikonisch – symbolisch“ erarbeiten die Schüler Kombinationsmöglichkeiten zunächst

handelnd (z. B. durch Nachspielen, Legen, Stecken), dann bildlich durch Ausmalen oder Selbstmalen der Elemente und ihrer Kombinationen und schließlich symbolisch in einem Baumdiagramm. Bei diesem werden die Beziehungen zwischen Elementen durch Verbindungslinien dargestellt und die Anzahl an Kombinationsmöglichkeiten durch Äste.

Wie Sie das Thema vermitteln können

- Zunächst bearbeiten die Schüler Aufgaben durch Ausprobieren mithilfe von Materialien. Sie erfahren das handelnde Nachvollziehen als Lösungsstrategie.
- Indem sie einzelne Elemente und deren Kombinationen bildlich darstellen, üben sie ein weiteres Verfahren, um kombinatorische Möglichkeiten zu ermitteln.
- In einem weiteren Schritt lernen die Schüler, Lösungsmöglichkeiten mithilfe eines Baumdiagramms zu finden und darzustellen. Sie erkennen, dass ein solches Schema auch bei kombinatorischen Problemen der Veranschaulichung dient.
- In einer Rechenkonferenz vollziehen die Schüler die erarbeiteten Lösungsstrategien nach. So üben sie, mathematische Sachverhalte zu reflektieren und zu verbalisieren.
- Das ansteigende Anforderungsniveau der Aufgaben und die Bearbeitung von der enaktiven bis zur symbolischen Ebene wird allen Kindern gerecht und bietet Differenzierungsmöglichkeiten.

Teil II



Verlaufsübersicht

Die Schüler lernen unterschiedliche Lösungsstrategien für kombinatorische Fragen kennen. Sie üben diese anhand einzelner Aufgaben und im Rahmen eines Stationentrainings. In einer Rechenkonferenz reflektieren sie ihre Arbeitsergebnisse und -strategien.

Material	Verlauf	Checkliste
M 1	Einstieg: Mit einem Spiel, bei dem sich die Schüler nach unterschiedlichen Vorgaben „sortieren“, wird die Klasse auf das Thema eingestimmt. Als Vorbereitung auf die Kombinatorik-Aufgaben ordnen und sortieren die Schüler Elemente. (EA) Die Klasse ermittelt beim Nachvollziehen verschiedener Situationen gemeinsam kombinatorische Möglichkeiten. (UG)	je nach Situation 3 bis 4 Bücher, 2 T-Shirts, 1 bis 2 Hosen
M 2	Erarbeitung 1: Die Schüler lösen Aufgaben durch Ausprobieren mit Materialien und durch handelndes Nachvollziehen. (EA)	Steckwürfel, Bücher, Stühle
M 3	Erarbeitung 2: Die Schüler finden Möglichkeiten mithilfe der bildlichen Darstellung. (EA)	Buntstifte
M 4 bis M 6	Übung: An Stationen lösen die Schüler Aufgaben anhand unterschiedlicher Strategien (Ausprobieren mit Materialien, handelndes Nachvollziehen, bildliche Darstellung). (EA)	Stationen vorbereiten; Stationenheft im Klassensatz kopieren
M 7	Erarbeitung 3: Die Schüler stellen Möglichkeiten mithilfe eines Baumdiagramms dar. (UG)	
M 8, M 9	Abschluss: Die Schüler wiederholen und reflektieren das Gelernte in einer Rechenkonferenz: Sie lösen und besprechen Aufgaben in der Gruppe und halten Lösungsstrategien fest. (EA, GA)	M 8 im Klassensatz, M 9 pro Gruppe kopieren oder als Tafelanschrieb vorbereiten; Plakat
Dauer: 9 bis 10 Unterrichtsstunden		

Hinweise zu den Materialien (M 1 bis M 10)

Einstieg: Zu Beginn der Unterrichtseinheit macht die Klasse ein Spiel, bei dem sich die Schüler nach unterschiedlichen Vorgaben „sortieren“, z. B.: Alle Kinder stellen sich der Größe nach auf, die Jungs stellen sich auf die eine Seite des Klassenzimmers, die Mädchen auf die andere, alle Mädchen mit langen Haaren hüpfen in die Luft, die Kinder, die im Sommer Geburtstag haben, klatschen in die Hände usw. Durch dieses Ordnen nach bestimmten Kriterien werden die Schüler spielerisch auf das Thema eingestimmt.

M 1: Um das Ordnen geht es auch bei diesem Arbeitsblatt. Die Schüler strukturieren Mengen nach bestimmten Kriterien, indem sie passende Elemente einander zuordnen und unpassende aussortieren oder Elemente in die richtige Reihenfolge bringen. Anhand dieser Aufgaben werden die Schüler auf kombinatorische Anordnungs- und Auswahlprobleme vorbereitet.

Als Überleitung zu ersten Kombinatorik-Aufgaben sollten Sie mit der Klasse eine Situation durchspielen, bei der es um das Finden von Möglichkeiten geht, z. B.:

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei/vier unterschiedliche Schulbücher neben- oder übereinanderzulegen?
- Auf wie viele Arten können sich drei/vier Schüler nebeneinanderstellen?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei T-Shirts und eine/zwei Hosen miteinander zu kombinieren?

M 2: Im Anschluss an diese gemeinsame Phase sollen die Schüler nun selbstständig die Aufgaben in M 2 lösen. Die Zugangsweise erfolgt zunächst auf der enaktiven Ebene. Sie bauen Türme in unterschiedlicher Kombination, ordnen Bücher oder verteilen Sitzplätze. Durch Ausprobieren mit konkreten Materialien oder durch Nachspielen finden die Kinder heraus, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Elemente auf unterschiedliche Weise anzuordnen oder auszuwählen.

Lösungen (M 2):

- Bei Aufgabe 1 (Turmbau) gibt es vier Möglichkeiten, zwei Steckwürfel in zwei Farben mit Wiederholung anzuordnen, und zwei Möglichkeiten ohne Wiederholung.
- In Aufgabe zwei (Bücherwunsch) ergeben sich vier Möglichkeiten, aus vier Büchern drei auszuwählen.
- Bei Aufgabe 3 (Platzwechsel) gibt es sechs Möglichkeiten für drei Kinder, auf drei Stühlen Platz zu nehmen.

Differenzierung: Bei diesen wie auch bei den folgenden Aufgaben bietet sich eine Differenzierungsmöglichkeit, indem leistungsschwächere Schüler zumindest einige Möglichkeiten finden und leistungsstärkere Schüler sämtliche. Zusätzlich kann der Schwierigkeitsgrad erhöht werden, indem man den Kindern (Zusatz-)Aufgaben mit größeren Zahlen gibt, z. B. vier statt drei Bücher, die übereinandergelegt werden. (Für eine individuelle Auswahl und Anpassung der Aufgaben können Sie die veränderbaren Word-Dokumente auf beiliegender CD 21 verwenden.)

Nach Abschluss der Arbeit mit M 2 berichten die Schüler, welche Möglichkeiten sie gefunden haben und wie sie vorgegangen sind. Fehlende Möglichkeiten werden ergänzt, sinnvolle Strategien und Tipps ausgetauscht. Haben die Schüler einige Aufgaben mit konkreten Materialien bearbeitet, können sie im Folgenden komplexere Probleme auf der ikonischen Ebene angehen.

M 3: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus drei bzw. vier Eissorten zwei oder sogar drei Kugeln auszusuchen? Zum Lösen dieser Aufgaben stellen die Schüler die Möglichkeiten bildlich dar. Als Hilfe sind die Eistüten vorgegeben, sodass sie die verschiedenen Möglichkeiten nicht alle zeichnen müssen, sondern durch Ausmalen ermitteln können.

Lösung (M 3):

- Es gibt sechs Möglichkeiten, zwei Kugeln Eis aus drei Sorten auszuwählen und zehn Möglichkeiten, zwei Kugeln aus vier Sorten. Zusatzaufgabe: Bei der Auswahl von drei Kugeln gibt es 20 Möglichkeiten.

Teil II



Differenzierung: Bei leistungsstärkeren Schülern kann auf die Zeichenvorlage in M 4 verzichtet werden. Schwächeren Schülern, die noch konkretes Material zum Ausprobieren benötigen, helfen farbige Plättchen, mit denen sie die möglichen Eiskugel-Kombinationen legen.

Im folgenden Stationentraining lösen die Schüler unterschiedlich schwierige Aufgaben zu allen o. g. kombinatorischen Problemstellungen. Dabei üben sie die erarbeiteten Strategien zum Ermitteln der Möglichkeiten (mit und ohne Materialien, durch Ausprobieren und handelndes Nachvollziehen oder durch bildliche Darstellung).

M 4 enthält Vorlagen für die Stationen 1 bis 3, an denen die Schüler die Aufgaben handelnd lösen. Bereiten Sie diese folgendermaßen vor:

- Bilder der Tassen und Teller in drei Farben ausmalen, ausschneiden und laminieren.
- Streifen für die Flaggen ausmalen, ausschneiden und laminieren (alternativ aus farbigem Tonpapier ausschneiden).
- Kombi-Schieber ausschneiden und laminieren (ein oder zwei Schieber einfügen, je nach dem, ob zwei- oder dreistellige Zahlen gesucht werden).

M 5 und M 6: Im Vorfeld kopieren Sie die Stationenkarten aus **M 5** je ein Mal (ggf. auch laminieren) und die Stationenhefte aus **M 6** im Klassensatz.

Stationen 1 bis 3: An diesen Stationen probieren die Schüler anhand der bereitliegenden Materialien aus, wie viele Lösungsmöglichkeiten sie finden. Diese zeichnen sie dann in ihr Stationenheft.

Lösungen (Stationen 1 bis 3):

- Bei Station 1 (Tischgedeck) gibt es mit drei Tassen und drei Tellern neun Kombinationsmöglichkeiten.
- An Station 2 (Flaggenkünstler) können die Schüler mit drei Farben sechs verschiedene Flaggen zusammenstellen.
- Bei Station 3 (Zahlenknobelei) ergeben sich für eine Kombination aus zwei Zahlen neun Möglichkeiten, aus drei Zahlen 27 Möglichkeiten.

Tipp: Sie können den Kombi-Schieber auch für das Ermitteln anderer Kombinationen verwenden. Zeichnen Sie hierzu einfach die Elemente, die kombiniert werden sollen, auf die Blankovorlage (Farben, Buchstaben, Symbole usw.) oder ändern Sie die Vorlage auf der CD 21. Solche Kombi-Schieber können die Schüler auch beim Bearbeiten anderer Aufgaben zu Hilfe nehmen.

Stationen 4 und 5: Hier sind Aufgaben ohne Materialien zu lösen. Die Schüler stellen die Lösungsmöglichkeiten bildlich dar. Da das genaue Zeichnen der Elemente zu aufwendig wäre, werden die Schüler angeregt, zur Vereinfachung Symbole zu verwenden.

Lösungen (Stationen 4 und 5):

- Bei Station 4 (Blumenstrauß) gibt es 10 Möglichkeiten, drei verschiedenfarbige Blumen zu kombinieren.
- An Station 5 (Clownskleidung) hat der Clown sechs Möglichkeiten, seine drei T-Shirts und zwei Hosen zu kombinieren.

Station 6: Hier sollen die Schüler sich schließlich selbst eine Kombinatorik-Aufgabe mit Lösung überlegen. Diese können sie im Anschluss an das Stationentraining vorstellen und die anderen Schüler lösen lassen.

Differenzierung: Eine quantitative und qualitative Differenzierung können Sie durch die Auswahl der Stationen vornehmen, die die Schüler bearbeiten. Außerdem lassen sich auch hier die Aufgaben mithilfe der veränderbaren Vorlagen auf der beiliegenden CD dem Leistungsniveau anpassen.

M 7: Im nächsten Schritt lösen die Schüler Aufgaben auf der nächstabstrakteren, der symbolischen Ebene, indem sie Möglichkeiten in einem Baumdiagramm darstellen. Sie erkennen, dass ein solches Schema auch bei kombinatorischen Problemen der Vereinfachung und Veranschaulichung dient. Beim Erstellen eines Stundenplans wenden die

Teil II



Schüler wichtige Lösungsstrategien an: die symbolische Darstellung der Elemente (Verwendung von Kürzeln für die Schulfächer) und deren grafische Darstellung in einem Diagramm (Zeichnen eines Baums). Das Baumdiagramm wird als bekannt vorausgesetzt und an dieser Stelle nicht erarbeitet. Sinnvoll kann es aber sein, ein zur Aufgabe passendes Baumdiagramm beispielhaft an der Tafel zu erstellen oder bei Bedarf Schülern das in M 7 vorgegebene Schema an die Hand zu geben.

Teil II

Lösung (M 7):

- Es gibt sechs Möglichkeiten, die 3 Fächer auf 3 Stunden zu verteilen.

Abschluss: Um die bislang erarbeiteten Strategien zum Lösen von Kombinatorik-Aufgaben zu wiederholen und zu reflektieren, findet in Gruppen eine Rechenkonferenz statt. Die Schüler lösen zunächst die Aufgaben aus **M 8**. Diese ähneln den bearbeiteten kombinatorischen Problemen. Anschließend besprechen und bewerten sie ihre Ergebnisse und ihre Vorgehensweise beim Lösen der Aufgaben. Wie sie bei ihrer Rechenkonferenz vorgehen, können die Schüler **M 9** entnehmen. M 9 sollten Sie den Gruppen als Kopie aushändigen oder den Text an die Tafel schreiben. Zum Abschluss ihrer Konferenz halten die Gruppen die Lösungsstrategien und Tipps auf einem Plakat fest und stellen sie der Klasse vor.

Lösungen (M 8):

- Aufgabe 1 (Geburtstagsparty): 21 Mal geben sich die Gäste die Hand.
- Aufgabe 2 (Zahlenschloss): Es gibt 24 Möglichkeiten, die vier Zahlen des Schlosses zu kombinieren.
- Aufgabe 3 (Im Restaurant): Es gibt neun Möglichkeiten, sich Hauptspeise und Nach-tisch zusammenzustellen.

Alternative: Zusätzlich oder alternativ können die Aufgaben aus **M 10** für eine Lernzielkontrolle zum Abschluss der Unterrichtseinheit eingesetzt werden.

Lösungen (M 10):

- Aufgabe 1 (Wie weiter?): 44, 55, 66, 77 ... / DE EF FG GH HI ... / 23, 20, 17, 14 ...
- Aufgabe 2 (Briefmarkensammlung): Timo hat sechs Möglichkeiten, die drei Briefmarken in unterschiedlicher Reihenfolge einzukleben.
- Aufgabe 3 (Sockenproblem): Nina hat sechs Möglichkeiten, ihre Socken zu kombinieren.
- Aufgabe 4 (Telefonnummer vergessen): Es gibt sechs mögliche Telefonnummern.

Materialübersicht

- M 1 Jetzt wird aufgeräumt! – Ordnen, Sortieren, Reihen bilden (Arbeitsblatt) ☞
- M 2 Türme, Bücher, Stühle – Möglichkeiten ausprobieren (Arbeitsblatt) ☞
- M 3 Eiskalt kombiniert – Möglichkeiten zeichnen (Arbeitsblatt) ☞
- M 4 Tassen, Flaggen, Zahlen – Vorlagen für die Stationen ☞
- M 5 Wie viele Möglichkeiten gibt es? – Stationenkarten ☞
- M 6 Wie viele Möglichkeiten gibt es? – Stationenheft ☞
- M 7 Stunde für Stunde – Möglichkeiten in einem Baumdiagramm darstellen (Arbeitsblatt) ☞
- M 8 Pizza, Party, Panzerknacker – Aufgaben für die Rechenkonferenz (Arbeitsblatt) ☞
- M 9 Wie kommst du darauf? – Anleitung für die Rechenkonferenz (Arbeitsblatt)
- M 10 Bist du kombifit? – Prüfe dein Wissen! (Arbeitsblatt) ☞

Die mit ☞ gekennzeichneten Materialien liegen zusätzlich auf CD 21 vor.

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Gut kombiniert!

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

