

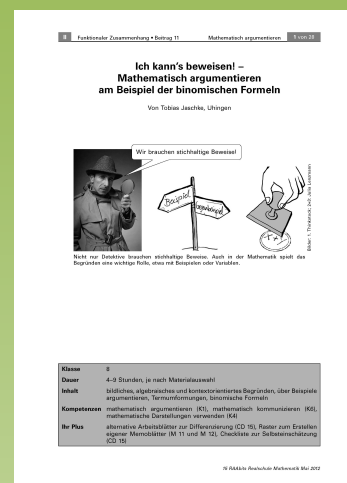
SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus: *Ich kann's beweisen!*

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Ich kann's beweisen! – Mathematisch argumentieren am Beispiel der binomischen Formeln

Von Tobias Jaschke, Uhingen



Bilder: 1. Thinkstock; 2+3: Julia Lenzmann

Nicht nur Detektive brauchen stichhaltige Beweise. Auch in der Mathematik spielt das Begründen eine wichtige Rolle, etwa mit Beispielen oder Variablen.

Klasse	8
Dauer	4–9 Stunden, je nach Materialauswahl
Inhalt	bildliches, algebraisches und kontextorientiertes Begründen, über Beispiele argumentieren, Termumformungen, binomische Formeln
Kompetenzen	mathematisch argumentieren (K1), mathematisch kommunizieren (K6), mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Ihr Plus	alternative Arbeitsblätter zur Differenzierung (CD 15), Raster zum Erstellen eigener Memoblätter (M 11 und M 12), Checkliste zur Selbsteinschätzung (CD 15)

Didaktisch-methodische Hinweise

Argumentieren – was ist das eigentlich?

Argumentieren ist der Versuch, eine andere Person oder sich selbst von einer Annahme, einem Lösungsweg, einer Erläuterung oder einer Vermutung zu überzeugen. Je mehr dabei die vorgebrachten Argumente stimmig und nachvollziehbar und je mehr sie an den Kriterien der Rationalität festzumachen sind, desto überzeugender sind sie. Im schulisch-mathematischen Rahmen bedeutet dies, dass eine Argumentation dann als schlüssig und überzeugend anerkannt wird, wenn sie in ihrer allgemeinen Gültigkeit klar wird, und sich bei den Lernenden die Erkenntnis einstellt, dass weitere Beispiele und Diskussionen keine neuen Erkenntnisse bringen werden.

Argumentieren im Mathematikunterricht – Vorbehalte und Chancen

Nach den Vorstellungen der Kultusministerkonferenz (KMK) sollen Argumentationsprozesse immanenter Bestandteil des Mathematikunterrichts sein. Und natürlich ist Argumentieren im Mathematikunterricht nichts gänzlich Neues. Schon immer wurden die Lernenden im Zuge von Lernprozessen aufgefordert, ihre Meinung zu vertreten und schlüssige Gründe für ihre Aussagen anzugeben. Neu ist, dass diese Argumentationsprozesse explizit als inhaltsübergreifende Kompetenzen formuliert sind, und daher bei der Unterrichtsplanung bewusst mit bedacht werden müssen. Sie werden dadurch wesentlich verbindlicher und verlangen von uns Mathematiklehrerinnen und -lehrern eine tiefergehende Durchdringung mathematischer Inhalte.

„Beweisen, das können meine Schüler nicht!“ – Vielleicht liegt diese weitverbreitete Ansicht unter Lehrkräften an den Vorstellungen, die viele vom Begründen und Beweisen aus der eigenen Schul- und Studienzzeit in den Lehrberuf mitbringen. Oft herrscht noch der Eindruck vor: je abstrakter die Beweisführung, desto hochwertiger die Argumentation. Die kommunikativen, modellierenden und argumentativen Prozesse, die im Vorfeld einer formalisierten Mathematik an der Tagesordnung sind, spielen in der Lehrerbildung kaum eine Rolle. Mathematik wird – vor allem an Universitäten – noch immer primär vermittelt als eine fertige und abstrakt-logische Wissenschaft, die man dann beherrscht, wenn man in der Lage ist, mit den innermathematischen Formalismen sicher und überzeugend umzugehen. Nicht formale Beweise oder Begründungen werden in der wissenschaftlichen Ausbildung eher als dilettantisch oder naiv abgetan.

Diese Ansicht entspricht allerdings nicht einem schülergemäßen Begründen und Argumentieren. Denn im schulischen Kontext ist das Argumentieren die Grundlage des Verstehens, das dadurch initiiert wird, immer wieder nach dem Warum zu fragen. Wenn man die Lernenden dazu ermutigen will – und das sollten wir wirklich tun, damit Mathematik nicht auf ein stupides Algorithmisieren reduziert wird –, benötigen diese das mathematische Rüstzeug, um darauf zu antworten. Wie dieses Rüstzeug aussehen kann, dazu macht diese Unterrichtseinheit Vorschläge.

Im Mathematikunterricht an Haupt- und Realschulen spielen die formalen Beweise der Fachwissenschaft eine untergeordnete Rolle. Hier ist es vielmehr wichtig, die grundlegenden Denkprinzipien und Begründungsstrategien zu lernen und zu verstehen sowie unterschiedliche Argumentationsarten zu akzeptieren und zu fördern. Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, dass die Suche nach geeigneten grafischen Darstellungen (bildliche Argumentation), nach Beispielen und Gegenbeispielen oder nach passenden Situationen (kontextorientierte Argumentation) sowie die Verwendung von Variablen (algebraische Argumentation) hilfreiche Argumentationsstrategien sind. Dazu müssen diese Beweisformen aber regelmäßig im Unterricht vorkommen und es muss über die Aussagekraft und die dahinterstehenden Prinzipien reflektiert werden.

Zum Argumentieren auffordern – eine neue Aufgabenkultur

Schülerinnen und Schüler glauben ihrer Lehrerin oder ihrem Lehrer – besonders im Fach Mathematik – erfahrungsgemäß fast alles. Der Wunsch nach rationaler Stimmigkeit muss erst provoziert werden. So muss man den Lernenden verdeutlichen, dass aus *einem* richtigen Beispiel noch keine allgemeine Gültigkeit abgeleitet werden kann oder dass das Finden eines Gegenbeispiels ausreicht, um Behauptungen zu widerlegen. Auch Strategien, wie durch geeignete Visualisierungen oder durch die Verwendung von Variablen Verallgemeinerungen zu erzielen sind, müssen im Mathematikunterricht erst erlernt werden.

Diese Begründungstätigkeiten kann man bereits in der Aufgabenstellung mitdenken und die Lernenden so zur Reflexion auffordern. Hier einige Beispiele: „Begründe dein Vorgehen“, „Widerlege diese Behauptung durch ein Gegenbeispiel“, „Überprüfe, ob ...“, „Veranschauliche diesen Zusammenhang durch eine geeignete Zeichnung“ oder „Gilt das immer? Überprüfe, indem du Variablen verwendest“.

Schritt für Schritt – die Beweisstrategien im Überblick

Da die Lernenden in dieser Einheit das Argumentieren anhand der binomischen Formeln lernen, sollten sie diese bereits kennen und elementare algebraische Umformungen beherrschen. Es werden jedoch auch andere Terme sowie geometrische Zusammenhänge als Beispiele verwendet, um die Übertragbarkeit der Argumentationsstrategien zu zeigen.

Sie können die Materialien hintereinander als Einheit einsetzen oder – da das Thema Argumentieren ein recht großes und komplexes ist – auch losgelöst voneinander, je nachdem, welchen Schwerpunkt Sie setzen möchten.

Die vorliegenden Materialien versuchen, zunächst eine alltagsnahe und eher **fachunspezifische Sensibilisierung für die Notwendigkeit des Begründens** zu erzeugen. Dies erfolgt über die Betrachtung von alltäglichen Begründungssituationen (**M 1**). Erst im Anschluss werden grundlegende mathematische Beweisprinzipien vorgestellt: Die Schülerinnen und Schüler lernen das **Begründen durch Beispiele und Gegenbeispiele (M 2 und M 3)** und üben sich im **Überprüfen von Rechnungen** sowie in der **Fehlersuche (M 4)**. Sie arbeiten mit **ikonischen Begründungen (M 5–M 7)** und machen sich mit dem **algebraischen Argumentieren (M 8 und M 9)** vertraut. Die neuen Beweisstrategien wollen trainiert werden: Eine **zusammenfassende Übung** bietet **M 10**.

Ein besonderes Augenmerk gilt den **Memoblättern (M 11 und M 12)**. Diese werden – nicht wie sonst üblich – fertig mitgeliefert, sondern im Zuge der Erarbeitung von den Lernenden selbst erstellt. Die Schülerinnen und Schüler halten das Wichtigste in ihrer eigenen Sprache und in der für sie nötigen Ausführlichkeit fest. So prägt sich das Gelernte nachhaltig ein.

Machbar für alle – Angebote zur Differenzierung

Das komplexe Thema des Argumentierens erfordert ein Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus, da es gerade im Bereich der Vorstellungskraft und des Abstrahierens große Kompetenzunterschiede gibt. Damit die Grundlagen trotzdem für jeden Einzelnen erlernbar sind, bieten wir Ihnen auf der **CD 15** zu den Materialien **M 6**, **M 7** und **M 10** jeweils ein alternatives Arbeitsblatt für schwächere Lernende sowie Tippkarten zu **M 2**. Eine **Checkliste zur Selbsteinschätzung** macht Stärken und Schwächen in der Beherrschung der Inhalte deutlich und fordert zum weiteren Üben auf.

Ausblick – Argumentieren als fester Bestandteil des Unterrichts

Die hier vorgestellten Argumentationsstrategien lassen sich prinzipiell auf alle anderen Inhalte der Schulmathematik übertragen. Ziel sollte sein, im Unterricht eine Lernkultur des Warum-Fragens zu entwickeln. Wenn die Schülerinnen und Schüler lernen, nicht einfach alles als gegeben anzunehmen und stattdessen Dinge zu hinterfragen, werden sie mündig und das Begründungsbedürfnis entsteht automatisch. Sicher ist es bis dahin ein weiter Weg, aber wir sollten uns immer wieder auf diesen begeben.

Auf einen Blick

Stunde 1 Inner- versus außermathematisches Argumentieren

M 1 (Fv) Warm-up – was heißt „begründen“ eigentlich?

Stunde 2/3 Möglichkeiten und Grenzen des Begründens mit Beispielen

M 2 (Ab) Aussagen bestätigen oder widerlegen – Beispiel und Gegenbeispiel

M 3 (Ab) Aufgepasst! – Nicht immer genügt ein Beispiel

Stunde 4 Konstruktiver Umgang mit Fehlern

M 4 (Ab) Wo steckt der Fehler? – Ergebnisse überprüfen

Stunde 5/6 Ikonisches Begründen

M 5 (Ab) Wie kann ich mir das vorstellen? – Variablen und Terme veranschaulichen

M 6 (Ab) Das wird ja ein Rechteck! – Terme multiplizieren

M 7 (Ab) Gar nicht so schwierig! – Die 1. binomische Formel grafisch begründen

Stunde 7/8 Algebraisches Begründen

M 8 (Ab) Für alle Zahlen gleichzeitig – mit Variablen begründen

M 9 (Ab) Mach dich fit! – Begründen mit Variablen und Termen

Stunde 9 Die Beweisstrategien festigen

M 10 (Lk) Beweisen mit Beispielen, Variablen und Geometrie – teste dich selbst!

Zusatzmaterial

M 11 (Ab) Das merk ich mir! – Mein Memoblatt 1

M 12 (Ab) Das merk ich mir! – Mein Memoblatt 2

Was kann ich schon? – Checkliste zur Selbsteinschätzung

auf CD

Alternative Arbeitsblätter und Tipps zur Differenzierung

auf CD



Legende der Abkürzungen

Ab: Arbeitsblatt; **Fv:** Folienvorlage; **Lk:** Lernkontrolle

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Übungseinheit ohne ikonisches Begründen für nur 4 Stunden mit folgenden Materialien:

Stunde 1: Argumentieren – was ist das eigentlich?

M 1

Stunde 2/3: Mit Beispielen begründen

M 2, M 3

Stunde 4: Mit Variablen begründen

M 8

M 9 eignet sich gut als Hausaufgabe.

Die Lösungen finden Sie ab Seite 23.

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus: *Ich kann's beweisen!*

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

