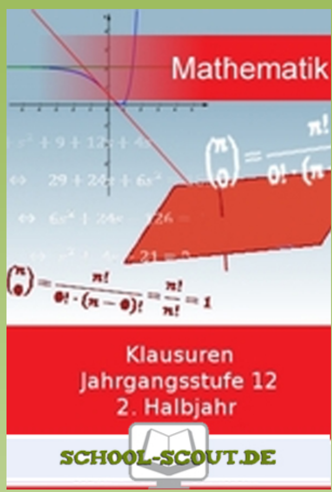
Auszug aus:

Klausuren Jahrgangsstufe 12, 2. Halbjahr



Thema:	**Klausuren Jahrgangsstufe 12 2. Halbjahr**
TMD:	
Kurzvorstellung des Materials:	Lehrer wünschen sich häufig Ideensammlungen für Klausuren im Kursunterricht. Dieses Material bietet 3 Klausurvorschläge für die 12. Klassenstufe. Die Aufgaben decken den gesamten Lehrstoff, der üblicherweise im zweiten Halbjahr in den Themenfeldern Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik behandelt wird, ab. Zu jeder Klausur gehört eine ausführliche und schülergerechte Musterlösung.
Übersicht über die Teile	3 Klausuren zu den Themengebieten Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik: Abstandsbestimmungen von Punkt, Gerade und Ebene, Kurvendiskussion der natürlichen Exponentialfunktion, Flächenberechnung, Grundlagen sowie Erwartungswert und Standartabweichung binomialverteilter Zufallsvariablen. Die Klausuren sind für eine Bearbeitungszeit von 90 Minuten ausgelegt.
Information zum Dokument	• Ca. 33 Seiten, Größe ca. 1,9 MByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ⬩ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

Klausur Nr.1

Analytische Geometrie: Euklidische Metrik II

Name: ………………………………………..

Aufgabe 1

Gegeben sei Ihnen die Ebene $E: 3x_1 + 4x_3 - 10 = 0$ sowie der Punkt $P = (5; 3; 5)$.

a) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P zur Ebene E.

b) Geben Sie eine Gleichung derjenigen Geraden g an, die senkrecht zu E und durch den Punkt P verläuft.

c) Welche Punkte auf g haben von E den Abstand 10 LE ?

d) Geben Sie eine Normalengleichung der Ebene F an, die parallel zur Ebene E verläuft und von ihr den Abstand 3 LE hat.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass der Punkt $Q = (1; 1; 3)$ nicht auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

liegt und berechnen Sie den Abstand des Punktes zur Geraden.

Aufgabe 3

Gegeben sei Ihnen die Ebene

$$E: x_1 + 2x_2 - x_3 + 5 = 0$$

sowie für alle $k \in \mathbb{R}$ die Geradenschar

$$g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}.$$

a) Diskutieren Sie, ob es Belegungen des Parameters k gibt, sodass die Gerade orthogonal zur Ebene verläuft und berechnen Sie in diesem Fall die Koordinaten des Durchstoßpunktes.

b) Untersuchen Sie, ob es Geraden gibt, die parallel zur Ebene verlaufen und bestimmen Sie in diesen Fällen den Abstand von Gerade und Ebene.

Aufgabe 4

Gegeben sei Ihnen die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowie der nicht auf der Geraden g liegende Punkt $Q = (-2;\ -3; 5)$.

a) Welche Punkte auf der Geraden g haben von der x_2x_3 - Ebene den Abstand 6 Längeneinheiten?

b) Welche Punkte auf der Geraden g haben vom Punkt Q den Abstand $\sqrt{155}$ Längeneinheiten ?

Musterlösung zu Klausur Nr. 1

Aufgabe 1

a) Zur Berechnung des Abstandes vom Punkt $P = (5; 3; 5)$ zur Ebene

$$E: 3x_1 + 4x_3 - 10 = 0$$

benötigen wir die Hessesche Normalenform. Hierzu normieren wir zunächst den Normalenvektor auf die Länge 1:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{n}| = \sqrt{9 + 16} = 5,$$

also

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für die Hessesche Normalenform die Gleichung:

$$E: \frac{3x_1 + 4x_3 - 10}{5} = 0.$$

Wir erhalten für den Abstand des Punktes zur Ebene:

$$d(P, E) = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 - 10}{5} = 5.$$

Der Punkt P hat also demnach einen Abstand von 5 LE zur Ebene.

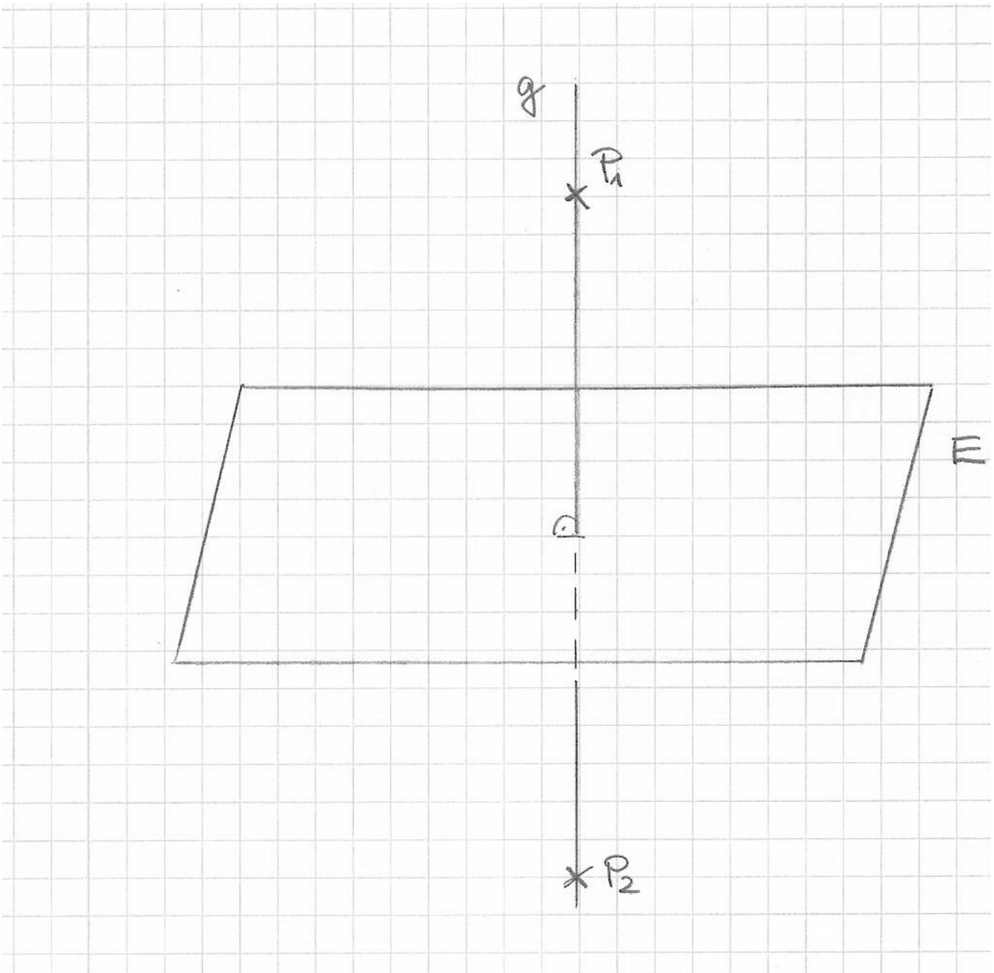
b) Soll die Gerade g orthogonal zur Ebene verlaufen, so müssen der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene linear abhängig, also parallel sein.

Auf Grund der Forderung, dass der Punkt $P = (5; 3; 5)$ auf der Geraden liegen soll, ist die die Gerade eindeutig charakterisiert und eine mögliche Gleichung wäre daher

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

E-Mail: info@School-Scout.de ⬩ Internet: http://www.School-Scout.de ⬩ Fax: 02501/26048
Linckensstr. 187 ⬩ 48165 Münster

c) Wir suchen diejenigen Punkte, die auf der Geraden liegen und von der Ebene einen festen Abstand von 10 LE besitzen. Es ist anschaulich klar, dass dies genau zwei Punkte sein können, wie Ihnen auch die untere Skizze veranschaulicht:



Die Gerade kann als Punktmenge P_l aufgefasst werden mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+3l\\3\\5+4l\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_l = (5+3l; 3; 5+4l)$$

Die Bedingung, die es zu erfüllen gilt, lautet

$$d(P_l, E) = 10.$$

Wir setzen somit die Punktmenge P_l in die Hessesche Normalenform der Ebene aus Aufgabenteil a ein und fordern, dass dieser Ausdruck den Wert 10 annimmt. Wir müssen hierbei allerdings bedenken, dass (siehe Skizze) die gesuchten Punkte auf unterschiedlichen „Seiten“ der Ebene liegen, wir also als Abstand des Betrag betrachten müssen:

$$d(P_l, E) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{3\cdot(5+3l)+4\cdot(5+4l)-10}{5}\right| = 10.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{15+9l+20+16l-10}{5}\right| = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{25+25l}{5}\right| = 10.$$

Lösen wir diese Betragsgleichung, so müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

$$a) \quad \frac{25+25l}{5} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 25+25l = 50 \quad \Leftrightarrow \quad l = 1$$

$$b) \quad \frac{25+25l}{5} = -10 \quad \Leftrightarrow \quad 25+25l = -50 \quad \Leftrightarrow \quad l = -3$$

Wir erhalten damit wie schon vorausgesagt zwei Punkte, die wir durch die beiden Belegungen des Skalars l erhalten:

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\3\\9\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_1 = (8;3;9)$$

$$\overrightarrow{OP_{-3}} = \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\\-7\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_{-3} = (-4;3;-7).$$

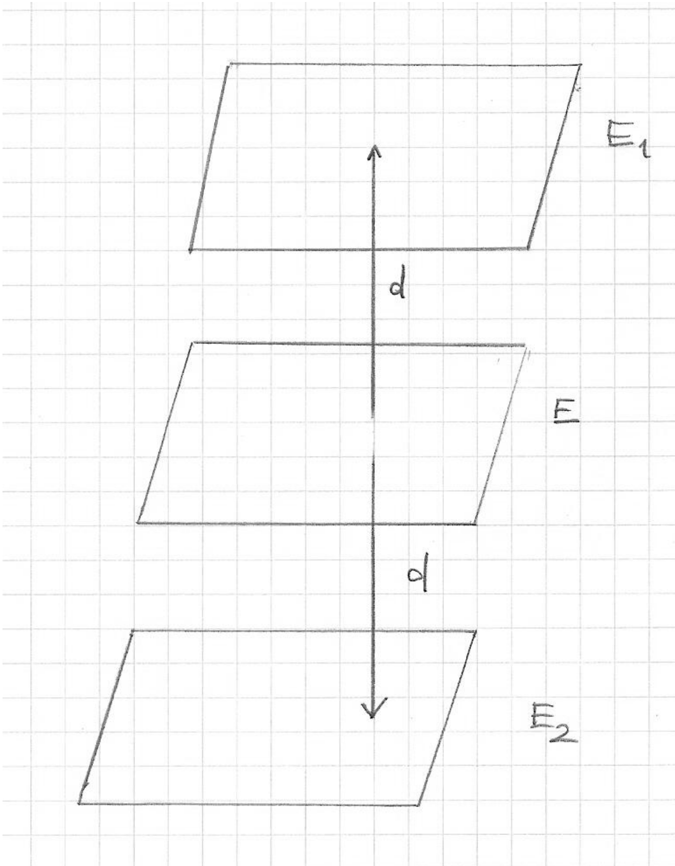
Somit besitzen die beiden Punkte $P_1 = (8;3;9)$ und $P_{-3} = (-4;3;-7)$ auf der Geraden g von der Ebene E den Abstand 10 LE.

d) Gesucht sind diejenigen Ebenen, die parallel zur Ebene $E: 3x_1 + 4x_3 = 10$ verlaufen und von ihr einen Abstand von 3 LE besitzen.

Auf Grund der Tatsache, dass alle Ebenen, die parallel zueinander verlaufen sollen, einen linear abhängigen Normalenvektor besitzen müssen, gilt für die Menge der parallelen Ebenen:

$$E_d: 3x_1 + 4x_3 = d.$$

Analog zum Aufgabenteil c müssen auch hierfür zwei Lösungen existieren, wie die untere Skizze verdeutlicht:



Wir konstruieren die Gleichungen dieser Ebenen, indem wir zunächst jeweils einen Punkt innerhalb der parallelen Ebenen berechnen.

Hierzu konstruieren wir eine orthogonale Hilfsgerade h zur Ebene E, deren Richtungsvektor auf die Länge 1 normiert ist – dies wird mit dem zuvor berechneten Normalenvektor

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

erreicht. Als Stützvektor wählen wir den Ortsvektor eines beliebigen Punktes, der in der Ebene liegt, zum Beispiel den Punkt $P = (2; 0; 1)$, sodass wir als mögliche Darstellung der Hilfsgeraden erhalten:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen nun jeweils die beiden Punkte, die von der Geraden h den Abstand 3 Längenheiten besitzen. Diese werden uns gegeben durch die beiden Linearkombinationen