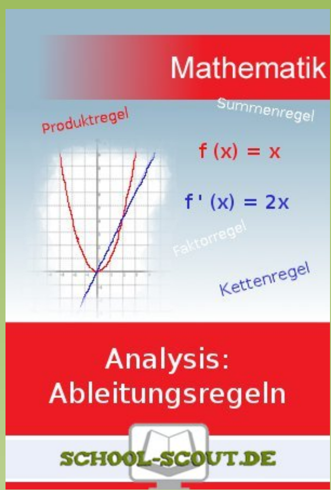
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Analysis - Grundlagen der Differentialrechnung: Ableitungsregeln

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Musterlösung

1. a) $f(x) = x \cdot (5x^2 - 3x) \;\Rightarrow\; f'(x) = 1 \cdot (5x^2 - 3x) + x \cdot (10x - 3) =$

$$5x^2 - 3 + 10x^2 - 3x \quad \Rightarrow \; f'(x) = 15x^2 - 6x$$

b) $f(x) = (x^2 - 5x) \cdot (4x + 5) \;\Rightarrow\; f'(x) = (2x - 5) \cdot (4x + 5) + (x^2 - 5x) \cdot 4 \;\Rightarrow$

$$f'(x) = 8x^2 + 10x - 20x - 25 + 4x^2 - 20x = 12x^2 - 30x - 25$$

c) $f(x) = (5x^4 - 2x) \cdot (x^3 + x^2) \Rightarrow\; f'(x) = (20x^3 - 2)(x^3 + x^2)$

$$+(5x^4 - 2x)(3x^2 + 2x)$$

$$f'(x) = 20x^6 + 20x^5 - 2x^3 - 2x^2 + 15x^6 + 10x^5 - 6x^3 - 4x^2$$

$$f'(x) = 35x^6 + 30x^5 - 8x^3 - 6x^2$$

d) $f(x) = (5x^7 - 8x)^2 = (5x^7 - 8x) \cdot (5x^7 - 8x) \;\Rightarrow$

$$f'(x) = (35x^6 - 8)(5x^7 - 8x) + (5x^7 - 8x)(35x^6 - 8x) = 2 \cdot (5x^7 - 8x)(35x^6 - 8)$$

$$f'(x) = 2 \cdot (175x^{13} - 40x^7 - 280x^7 + 64x) = 350x^{13} - 640x^7 + 128x$$

2. a) $f(x) = \frac{2}{x} \cdot (x + 1)^2 = 2x^{-1} \cdot (x^2 + 2x + 1) \Rightarrow$

$$f'(x) = -2x^{-2} \cdot (x^2 + 2x + 1) + 2x^{-1} \cdot (2x + 2) = \frac{2}{x^2}\left(-(x^2 + 2x + 1) + x \cdot (2x + 2)\right)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2}(-x^2 - 2x - 1 + 2x^2 + 2x) = \frac{2}{x^2}(x^2 - 1) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2} = 2 - \frac{2}{x^2}$$

b) $f(x) = (2x - 3) \cdot \sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + (2x - 3) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = 2 \cdot \sqrt{x} + (2x - 3) \cdot \frac{\sqrt{x}}{2x}$

$$= 2 \cdot \sqrt{x} + 2x \cdot \frac{\sqrt{x}}{2x} - 3 \cdot \frac{\sqrt{x}}{2x} = 2\sqrt{x} + \sqrt{x} - \frac{3}{2x}\sqrt{x} = 3\sqrt{x} - \frac{3}{2x}\sqrt{x}$$

$$f'(x) = 3\sqrt{x} \cdot \left(1 - \frac{1}{2x}\right)$$

Wir haben hierbei benutzt: $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$.

3. a) $f(x) = x^2 \cdot \sin x \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x = x \cdot (2 \sin x + x \cos x)$

b) $f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x = x \cdot e^x \left(1 + \frac{1}{2} x\right)$

c) $f(x) = \sin x \cos x \;\Rightarrow\; f'(x) = \cos x \cos x + \sin x\,(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

3. Quotientenregel

Diese Regel kommt immer dann zur Anwendung, wenn der Funktionsterm – wie der Name der Ableitungsregel schon nahe legt – in Form eines Bruches d.h. Quotienten vorliegt. In der Aufgabe 2 des vorherigen Arbeitsblattes haben Sie gesehen, dass es unter Umständen recht mühsam sein kann, einen Funktionsterm der Gestalt $\frac{u(x)}{v(x)}$ angestrengt als $u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$ behandeln zu wollen. Wenn die Funktion v zudem noch mehrgliedrig ist, wird es unmöglich, ohne weitere Hilfsmittel eine Ableitung zu bestimmen.

Die Quotientenregel gibt Ihnen hiermit ein Hilfsmittel zur Hand:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Beachten Sie bei der Bildung der einzelnen Ableitungen die Reihenfolge – wenn Sie $u(x)$ und $v(x)$ vertauschen, bekommen Sie nicht die richtige Ableitung heraus.

Beispiel: $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$. Setze $u(x) = 2x - 1$ und $v(x) = x^2 + 1$. Dann erhalten Sie:

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x^2+1)-(2x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}.$$

Übungen

1. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion mit Hilfe der Quotientenregel:

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{2(x+1)^2}{x}$ c $f(x) = \frac{2x^3+x^2-1}{x^2+1}$) d) $f(x) = \frac{2x}{x^3+x+1}$

e) $f(x) = \frac{4x^2-1}{x^2+1}$ f) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4x+4}$

2. Leiten Sie ab:

a) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ b) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ c) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

3. Bestimmen Sie von vorgegebenen Funktionen jeweils die Ableitungsfunktion. Beachten Sie, dass Sie unter Umständen neben der Quotientenregel auch die Produktregel benötigen.

a) $f(x) = \frac{x^2\cdot(x-1)}{x^2-4}$ b) $f(x) = \frac{x\cdot e^x}{x-1}$

Musterlösung

1. a) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)-(x^2+1)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$

b) $f(x)=\frac{2(x+1)^2}{x}=\frac{2(x^2+2x+1)}{x}=\frac{2x^2+4x+2}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{(4x+4)\cdot x-(2x^2+4x+2)\cdot 1}{x^2}$

$f'(x)=\frac{4x^2+4x-2x^2-4x-2}{x^2}=\frac{2x^2-2}{x^2}=2-\frac{2}{x^2}.$

c) $f(x)=\frac{2x^3+x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(6x^2+2x)\cdot(x^2+1)-(2x^3+x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{6x^4+6x^2+2x^3+2x-2x^4-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=\frac{4x^4+6x^2+4x}{(x^2+1)^2}.$

d) $f(x)=\frac{2x}{x^3+x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot(x^3+x+1)-2x\cdot(3x^2+1)}{(x^3+x+1)^2}=\frac{2x^3+2x+2-6x^3-2x}{(x^3+x+1)^2}=\frac{-4x^3+2}{(x^3+x+1)^2}$

e) $f(x)=\frac{4x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{8x\cdot(x^2+1)-(4x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{8x^3+8x-8x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{10x}{(x^2+1)^2}$

f) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+4x+4} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+4x+4)-(x-1)\cdot(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}=\frac{x^2+4x+4-2x^2-4x+2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$

$=\frac{-x^2+2x+8}{(x^2+4x+4)^2}.$

2. a) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x}-(x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\sqrt{x}-(x+1)\frac{\sqrt{x}}{2x}}{x}=\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1\sqrt{x}}{2\,x}}{x}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x}$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2\sqrt{x}}.$

b) $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

c) $f(x)=\frac{x}{e^x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot e^x-x\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$

3. a)

$f(x)=\frac{x^2\cdot(x-1)}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{[2x\cdot(x-1)+x^2\cdot 1]\cdot(x^2-4)-x^2\cdot(x-1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{(3x^2-2x)(x^2-4)-2x^3(x-1)}{(x^2-4)^2}$

$f'(x)=\frac{3x^4-12x^2-2x^3+8x-2x^4+2x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2+8x}{(x^2-4)^2}.$

E-Mail: info@School-Scout.de ⬩ Internet: http://www.School-Scout.de ⬩ Fax: 02501/26048
Linckensstr. 187 ⬩ 48165 Münster