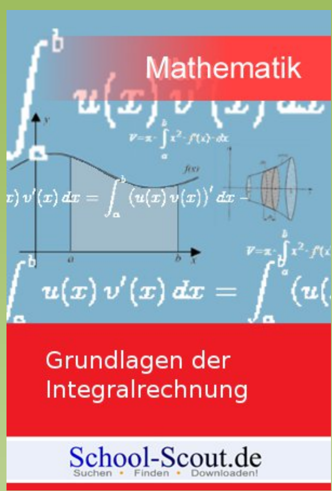
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben zu orientierten Flächeninhalten

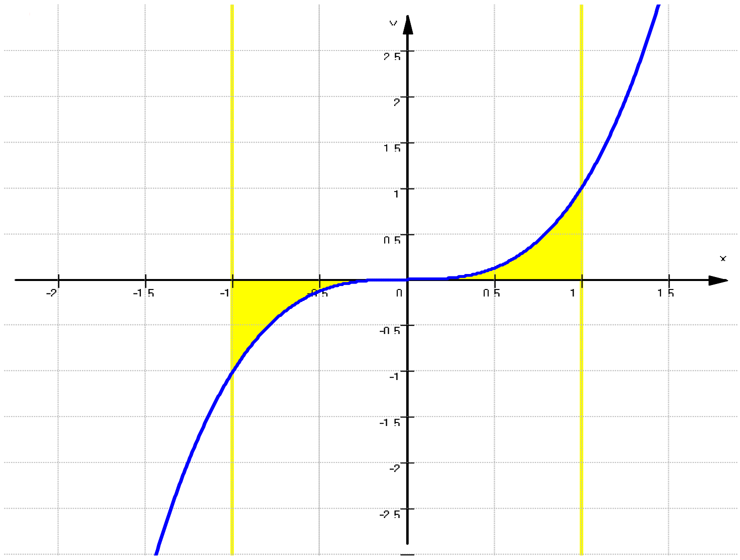
Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Thema:	**Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben zu orientierten Flächeninhalten**
TMD:	
Kurzvorstellung des Materials:	Schüler möchten häufig am Ende einer Unterrichtseinheit die Grundlagen nochmals wiederholen. Dieses Material stellt die Berechnung von Flächen ober- und unterhalb der x-Achse vor und bietet in vielen Übungsaufgaben Schülern die Möglichkeit, zu üben und zu vertiefen. Das Material ist besonders für den Einstieg in die Integralrechnung geeignet, da nur ganzrationale Funktionen Gegenstand sind.
Übersicht über die Teile	1. Orientierte Flächeninhalte 2. Arbeitsblatt 3. Musterlösung
Information zum Dokument	• Ca. 9 Seiten, Größe ca. 690 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

Orientierte Flächeninhalte



Wir starten mit einer Aufgabe: Berechnen Sie das Integral

$\int_{-1}^{1} x^3 dx$.

Die übliche Rechnung ergibt:

$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

Wie beurteilen Sie das Ergebnis?

Sie wissen, dass wir Flächen als Integrale interpretieren können. In der nebenstehenden Skizze sehen Sie den Kurvenverlauf dargestellt und die schraffierte Fläche entspricht dem Wert des Integrals. – Da sind wir beim Thema: Laut Rechnung dürfte dort nämlich gar keine Fläche sein, die wird ja als 0 angegeben! Wie Sie allerdings zweifelsfrei erkennen können, existieren zwei Flächenstücke.

Die Begründung, warum unsere Berechnung nicht das gewünschte Ergebnis liefert, ist die Folgende: Beide Flächenstücke sind gleich groß, aber mit unterschiedlichem Vorzeichen behaftet. Das linke Flächenstück liegt unterhalb der x-Achse, während das rechte oberhalb verläuft. Integrieren wir also ohne Berücksichtigung, dass die Flächen unterschiedlichen Vorzeichens sind, so addieren diese sich zu Null.

Das Integral $\int_{-1}^{0} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ ist negativ. Die Interpretation ist daher, dass sich das Flächenstück oberhalb der Kurven, aber unterhalb der x-Achse befindet, wie Sie an der Skizze leicht ablesen können. Da Flächen nicht negativ sein können, müssen wir bei der Berechnung von dieser den Betrag nehmen:

$$\left|\int_{-1}^{0} x^3 dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}\right| = \left|0 - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

Wenn Sie nicht genau wissen, ob die Flächen im Vorfelde oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen, dann können Sie die Berechnung auch einfach wie gewohnt durchführen und im Nachhinein, wenn sich das Ergebnis als negativ herausstellt, durch die Rechnung Betragsstriche ergänzen.

Die oben gefärbte Fläche ließe sich also wie folgt berechnen:

Musterlösung des Arbeitsblattes

Aufgabe 1

Bei allen Funktionen müssen Sie zunächst die Integrationsgrenzen ausrechnen, die die Nullstellen der Funktionen sind.

a) Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \lor x_2 = 4$. Bedenken Sie: Wenn eine Gleichung kein Absolutglied aufweist, sollten Sie immer faktorisieren!

   Fläche: $\left|\int_0^4 (x^2 - 4x)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]_0^4\right| = \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}$ FE.

b) Bei dieser Funktion ist der Funktionsterm bereits faktorisiert, sodass wir die Nullstellen ablesen können:

   Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x \cdot (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = -2$. Die Nullstelle -2 tritt in zweifacher Ordnung auf – hier befindet sich eine Berührstelle.

   Zur Integration formen Sie den Funktionsterm zunächst in Summenform um:

$$f(x) = -x \cdot (x+2)^2 = -x \cdot (x^2 + 4x + 4) = -x^3 - 4x^2 - 4x$$

   Fläche: $\int_{-2}^0 (-x^3 - 4x^2 - 4x)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-2}^0 = 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ FE.

c) Die Funktion ist vom Grad 3 mit Absolutglied. Für die Ermittlung der Nullstellen benötigen Sie folglich eine Polynomdivision.

   Ein Tipp zum Raten einer Nullstelle ist: Sollte (!) die Gleichung eine ganzzahlige Lösung besitzen, dann ist dies ein Teiler des Absolutgliedes. Da das Absolutglied 2 ist, gibt es nur die möglichen Teiler $\pm 1, \pm 2$.

   Wir stellen fest, dass gilt: $f(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$, also ist 1 Nullstelle.

   Polynomdivision ergibt: $(x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x-1) = x^2 - x - 2$. Das Restpolynom zerlegen wir mit Hilfe der pq-Formel und erhalten: $x = 2$ und $x = -1$. Die Nullstellen der Funktion sind folglich: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$.

   Fläche: $A = \int_{-1}^1 f(x)dx + \left|\int_1^2 f(x)dx\right|$. Wo die Betragsstriche hinkommen, können Sie ohne weitere Überlegung an dieser Stelle noch nicht wissen; hier sei es Ihnen schon vorweg genommen, wir werden dies allerdings im Laufe der Rechnung noch sehen. Wir berechnen die Teilintegrale getrennt:

   $\int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^1 = \frac{13}{12} + \frac{19}{12} = \frac{8}{3}$ FE,

$$\left|\int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^2\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{13}{12}\right| = \left|-\frac{5}{12}\right|$$

$= \frac{5}{12}$ FE.

Die Gesamtfläche ist damit: $A = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$ FE.

d) Nullstellen: $f(x) = x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2} \vee x_2 = -\sqrt{2}$.

Fläche: $\left|\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^2 - 2)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{1}{3}2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \left(-\frac{1}{3}2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)\right|$

$= \left|\frac{2}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right| = \left|-\frac{8}{3}\sqrt{2}\right| = \frac{8}{3}\sqrt{2}$ FE

Zur Rechnung - Beachten Sie: $\left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$.

Aufgabe 2

Bemerkung zu elementaren Symmetrieeigenschaften (siehe Klasse 11): Wir unterscheiden prinzipiell zwei grundlegende Symmetrien:

a) (Achsen-)Symmetrie zur y-Achse: Enthält ein Polynom ausschließlich Potenzen von x in gerader Ordnung (also 2,4, etc , wobei zu beachten ist, dass Absolutglieder wie 7 auch künstlich als Potenz von x geschrieben werden können: $7 = 7 \cdot x^0$ und 0 ist gerade), so gilt die Funktionalgleichung $f(-x_i) = f(x_i)$

b) Punkt-Symmetrie zum Koordinatenursprung: Enthält ein Polynom ausschließlich Potenzen von x in ungerader Ordnung (1,3,5 etc), so gilt die Funktionalgleichung $f(-x_i) = -f(x_i)$.

Während die Regel mit „geraden/ungeraden Potenzen“ nur für Polynome zutrifft, gelten die Funktionalgleichungen als Nachweis für elementares Symmetrieverhalten beliebiger Funktionen.

a) Wir erkennen: Die Funktion enthält ausschließlich ungerade Potenzen von x und behaupten daher, dass die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft.

Zur Vollständigkeit hier der exakte Nachweis - zu zeigen: $f(-x_i) = -f(x_i)$. Es gilt:

$f(-x_i) = -(-x_i)^3 + (-x_i) = -(-x_i^3 + x_i) = -f(x_i)$.

Nullstellen: $f(x) = -x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

E-Mail: info@School-Scout.de ⬩ Internet: http://www.School-Scout.de ⬩ Fax: 02501/26048

Linckensstr. 187 ⬩ 48165 Münster

Laut Aufgabenstellung soll dieses 1 LE breite Flächenstück, das unterhalb des Graphens der Funktion liegt, einen Inhalt von 7 FE besitzen. Die Fläche, die das Flächenstück einnimmt, wird durch das Integral

$$A = \int_{u}^{u+1} 3 \cdot x^2 dx$$

beschrieben. Unser Integral muss also der Forderung $A = 7$ FE genügen.

Wir berechnen das Integral zunächst allgemein:

$\int_{u}^{u+1} 3x^2 dx = [x^3]_u^{u+1} = (u+1)^3 - u^3 = u^3 + 3u^2 + 3u + 1 - u^3 = 3u^2 + 3u + 1.$

Dieser Ausdruck beschreibt den Flächeninhalt des Streifens in Abhängigkeit von u, das heißt, abhängig von der Position des Streifens.

Durch die Forderung $A = 7$ erhalten wir eine Bedingung für u:

$$A = 3u^2 + 3u + 1 = 7 \Leftrightarrow 3u^2 + 3u - 6 = 0 \Leftrightarrow u^2 + u - 2 = 0$$

Wir lösen diese quadratische Gleichung und erhalten:

$u^2 + u - 2 = 0 \Leftrightarrow u_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, woraus folgt: $u_1 = 1$ oder $u_2 = -2$.

Die zweite Lösung scheidet aus, da sie negativ ist, denn wir haben das Flächenstück auf den ersten Quadranten beschränkt, so dass nur positive x-Werte angenommen werden dürfen.

Damit haben wir gefunden, dass der Streifen an der Stelle $x = 1$ bis $x = 2$ liegen muss, damit er den Flächeninhalt 7 FE besitzt.

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben zu orientierten Flächeninhalten

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de