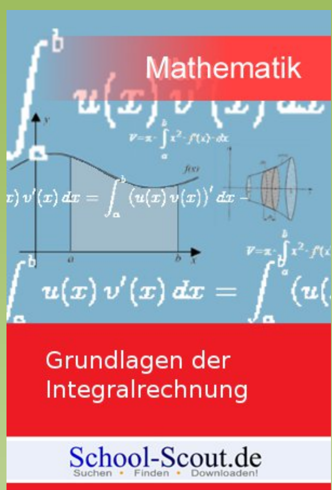
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben zu Flächen zwischen zwei Kurven

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Thema:	**Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben zu Flächen zwischen zwei Kurven**
TMD:	
Kurzvorstellung des Materials:	Schüler möchten häufig am Ende einer Unterrichtseinheit die Grundlagen nochmals wiederholen. Dieses Material stellt die Berechnung von Flächen zwischen den Graphen zweier Funktionen vor und bietet in vielen Übungsaufgaben Schülern die Möglichkeit, zu üben und zu vertiefen. Das Material ist besonders für den Einstieg in die Integralrechnung geeignet, da nur ganzrationale Funktionen Gegenstand sind.
Übersicht über die Teile	1. Flächen zwischen zwei Kurven 2. Arbeitsblatt 3. Musterlösung
Information zum Dokument	• Ca. 10 Seiten, Größe ca. 850 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

Musterlösung des Arbeitsblattes

Aufgabe 1

Zunächst sind bei allen Teilaufgaben die Integrationsgrenzen auszurechnen.

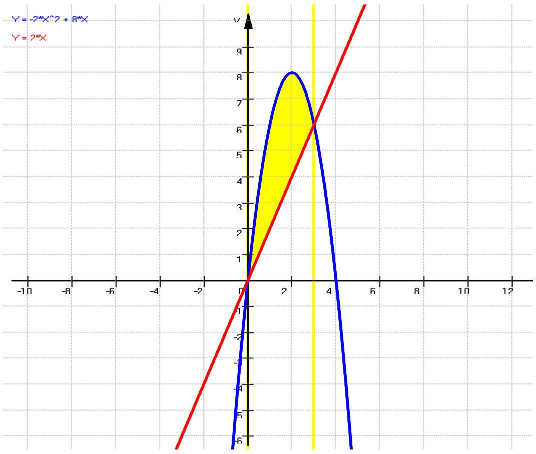
a) Schnittstellen:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2x^2 + 8x = 2x \Leftrightarrow -2x^2 + 6x = 0$

$\Leftrightarrow x \cdot (-2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 3$

Fläche: $A = \int_0^3 (f(x) - g(x))$

Also: $A = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3 = 9$ FE.



b) Schnittstellen: $f(x) = g(x)$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 - x + 5 = x^2 - 6x + 5 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 3 \pm 2$$

Die Schnittstellen sind demnach

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5.$$

Die Fläche ergibt sich somit als Summe zweier Teilintegrale: $A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_1^5 (g(x) - f(x))\,dx$. Wir berechnen die Integrale wieder getrennt:

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (x^3 - 5x^2 - x + 5 - (x^2 - 6x + 5))dx = \int_0^1 (x^3 - 6x^2 + 5x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

E-Mail: info@School-Scout.de ♦ Internet: http://www.School-Scout.de ♦ Fax: 02501/26048
Linckensstr. 187 ♦ 48165 Münster

$$\int_1^5 (g(x) - f(x))dx = \int_1^5 (-x^3 + 6x^2 - 5x)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_1^5 = \frac{125}{4} + \frac{3}{4} = 32$$

Dadurch erhalten wir als Gesamtfläche: $A = 32 + \frac{3}{4} = 32\frac{3}{4}$ FE.

c) Schnittstellen: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = x^3 - 3x^2 + 2x$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^3 - 2x^2 - x + 2) = 0$$

Durch das Faktorisieren wird uns die Schnittstelle $x = 0$ geschenkt. Den zweiten Faktor müssen wir mittels einer Polynomdivision zerlegen.

Raten liefert: $x = 1$ ist Lösung, da $1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0$.

Wir erhalten: $(x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x - 1) = x^2 - x - 2$. Das Restpolynom zerlegen wir mit Hilfe der pq-Formel: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

Die Gleichung hat also insgesamt die Lösungen $x_1 = -1$, $x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$. Dem entsprechend haben wir 3 Teilflächen zu berücksichtigen:

$$A = \left|\int_{-1}^0 (f(x) - g(x))dx\right| + \int_0^1 (f(x) - g(x))dx + \left|\int_1^2 (f(x) - g(x))dx\right|$$

Wir berechnen wiederum die Teilintegrale getrennt:

$$\left|\int_{-1}^0 (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-1}^0\right| = \left|0 - \frac{19}{30}\right| = \frac{19}{30}$$

$$\int_0^1 (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x)dx = \frac{11}{30} - 0 = \frac{11}{30}$$

$$\left|\int_1^2 (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x)dx\right| = \left|-\frac{4}{15} - \frac{11}{30}\right| = \frac{19}{30}$$

Somit ergibt sich eine Gesamtfläche von $A = \frac{19}{30} + \frac{11}{30} + \frac{19}{30} = \frac{49}{30} \approx 1{,}63$ FE.

Aufgabe 2

Wir haben diejenige Fläche zwischen beiden Kurven auszurechnen, die auf der x-Achse im Intervall [-1;4] liegt. Innerhalb dieser Integrationsgrenzen schneiden sich die Graphen der Funktionen an den Stellen 0 und 3. Dies bedeutet, wir haben insgesamt 3 Teilflächen zu berechnen:

$$A = \int_{-1}^{0}(f(x) - g(x))dx + \int_{0}^{3}(g(x) - f(x))dx + \int_{3}^{4}(f(x) - g(x))dx\ ,$$

wobei wir hierbei schon die Orientierung der Flächen berücksichtigt haben.

Die Teilintegrale ergeben:

$\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 5x\right)dx = \left[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 0 + \frac{95}{36} = 2\frac{23}{36}$,

$\int_{0}^{3}\left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 5x\right)dx = \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_{0}^{3} = \frac{39}{4} - 0 = 9\frac{3}{4}$,

$\int_{3}^{4}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 5x\right)dx = \left[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_{3}^{4} = -\frac{40}{9} + \frac{39}{4} = \frac{191}{36} = 5\frac{11}{36}$.

Wir erhalten demnach eine Gesamtfläche von $A = 2\frac{23}{36} + 9\frac{3}{4} + 5\frac{11}{36} = 17\frac{25}{36} \approx 17{,}69$ FE.

Aufgabe 3

Diese Aufgabe ist ein wenig komplexer, darum arbeiten wir uns langsam „heran". Die von dem Graphen der Funktion f mit der x-Achse eingeschlossene Fläche soll von der Ursprungsgeraden durch den Wendepunkt geteilt werden.

Wir benötigen also als erstes den Wendepunkt und als zweites die Fläche, die die Funktion mit der x-Achse einschließt.

Erinnern Sie sich an den Kalkül zur Berechnung des Wendepunktes: Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes ist das Verschwinden der 2. Ableitung im Wendepunkt – es muss folglich die Bedingung $f''(x) = 0$ erfüllt werden.

Zunächst formen wir den Funktionsterm in eine Summe um:

$$f(x) = \frac{1}{6}x \cdot (x-6)^2 = \frac{1}{6}x \cdot (x^2 - 12x + 36) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x.$$

Wie benötigen die ersten drei Ableitungsfunktionen:

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6,\ f''(x) = x - 4,\ f'''(x) = 1.$

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben zu Flächen zwischen zwei Kurven

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de