Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben und Übungsklausur

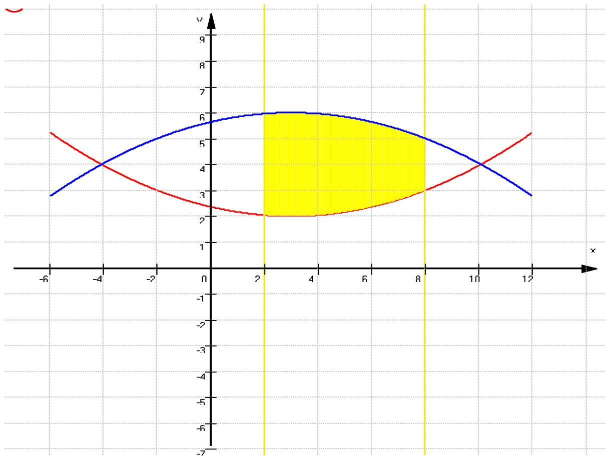
Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

Thema:	**Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben zu Flächen zwischen zwei Kurven**
TMD:	
Kurzvorstellung des Materials:	Schüler möchten häufig am Ende einer Unterrichtseinheit die Grundlagen nochmals wiederholen. Dieses Material stellt die Berechnung von Flächen zwischen den Graphen zweier Funktionen vor und bietet in vielen Übungsaufgaben Schülern die Möglichkeit, zu üben und zu vertiefen. Das Material ist besonders für den Einstieg in die Integralrechnung geeignet, da nur ganzrationale Funktionen Gegenstand sind.
Übersicht über die Teile	1. Flächen zwischen zwei Kurven 2. Arbeitsblatt 3. Musterlösung
Information zum Dokument	• Ca. 10 Seiten, Größe ca. 850 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

Flächen zwischen zwei Kurven

Bislang haben wir ausschließlich Flächen betrachtet, die von dem Graphen einer Funktion und der x-Achse eingeschlossen wurden. Im Grunde kann man dies als Spezialfall der Fläche zwischen zwei Kurven betrachten, wobei die zweite Kurve die x-Achse ist (dies wäre die Gerade mit der Gleichung $y = 0$). In diesem Abschnitt wollen wir die Fläche zwischen zwei Kurven diskutieren.



Wie würden Sie vorgehen, um die rechts abgebildete schraffierte Fläche zu berechnen?

Nehmen Sie hierzu an, die blaue Kurve sei der Graph einer Funktion f und die rote Kurve der Graph einer Funktion g. – Die Grenzen können Sie ablesen, es sind 2 und 8.

Wenn Sie sich klar machen, dass man mit Hilfe des Integrals $\int_2^8 f(x)dx$ die gesamte, *unterhalb der Funktion* verlaufende Fläche erhält, die von der x-Achse begrenzt wird, so bekommen wir eine Fläche heraus, die zu groß ist: Nämlich genau um die Fläche, die die Funktion g mit der x-Achse einschließt.

Die schraffierte Fläche A erhalten Sie somit als Differenz derjenigen Flächen, die die Funktionen jeweils mit der x-Achse einschließen:

$$A = \int_2^8 f(x)dx - \int_2^8 g(x)dx$$

Da die Integrationsgrenzen gleich sind, können Sie die beiden Integrale zusammenfassen und somit können Sie schreiben:

$$A = \int_2^8 (f(x) - g(x))\,dx$$

Natürlich wissen Sie häufig nicht, ob nun die Funktion f oberhalb von g liegt oder andersherum – das könnten Sie nur mit Hilfe einer Zeichnung genau sagen. Das macht aber auch nichts: Sollten Sie gerade die falsche „Zusammensetzung“ erwischen, erhalten Sie zwar auch das richtige Ergebnis, allerdings mit umgedrehtem Vorzeichen – in diesem Fall erhalten Sie die Fläche wiederum als den Betrag des Integralwertes.

Lassen Sie uns zunächst festhalten:

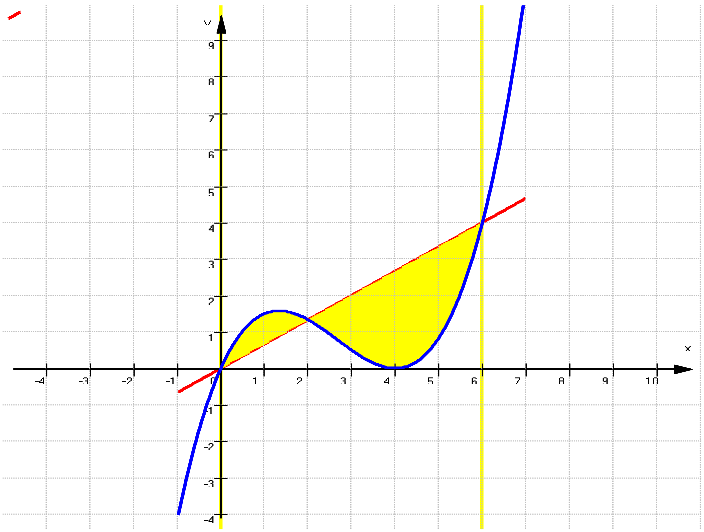
Die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g in den Grenzen von a bis b ist

$$A = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \right|$$

Häufig sind die Grenzen natürlich in vielen Aufgaben die Schnittpunkte und man fragt daher nach der von beiden Funktionen vollständig eingeschlossenen Fläche.

Lassen Sie uns ein konkretes Beispiel einmal durchrechnen:

Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von den beiden Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x$ und $g(x) = \frac{2}{3}x$ eingeschlossen wird!



In der Graphik sehen Sie den Verlauf beider Funktionen skizziert. Sie können ablesen, dass sich die beiden Graphen an den Stellen 0, 2 und 6 schneiden. Damit umschließen die Funktionen insgesamt zwei Flächenstücke, die wir berechnen müssen.

Da wir die Graphen kennen, können wir weiterhin sagen, welche Funktion im betreffenden Intervall oberhalb der anderen verläuft, so dass wir die Gesamtfläche ausdrücken können als die beiden Integrale

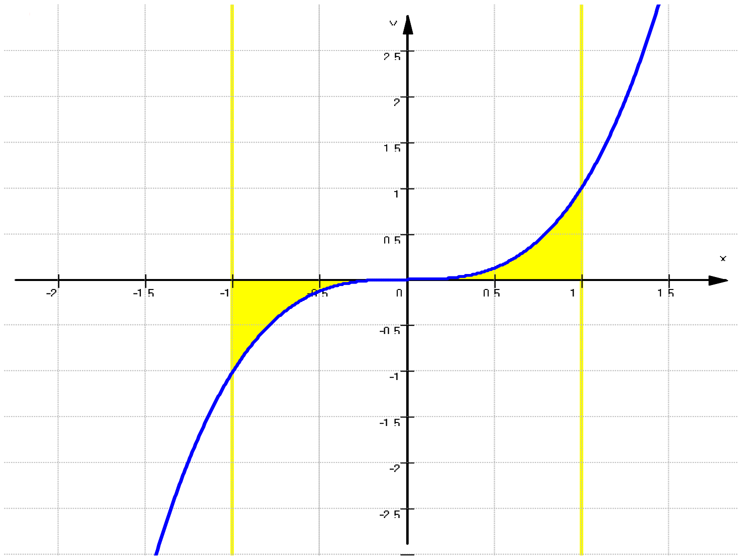
$$A = \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx + \int_2^6 (g(x) - f(x))\,dx$$

Würden Sie das zweite Integral auch wie das erste berechnen, also $\int_2^6 (f(x) - g(x))\,dx$ so erhª lt man f¿r dieses Integral zwar den richtigen Wert, doch mit umkehrtem Vorzeichen – der Wert des Integrals wäre negativ, weil in dem betreffenden Intervall die Gerade oberhalb der Funktion f verläuft und nicht andersherum, wie wir es mit der Rechnung annehmen würden. Sie müssten an dieser Stelle den Betrag des Integrals wählen.

Die Fläche ließe sich also auch berechnen durch:

Thema:	**Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben zu orientierten Flächeninhalten**
TMD:	
Kurzvorstellung des Materials:	Schüler möchten häufig am Ende einer Unterrichtseinheit die Grundlagen nochmals wiederholen. Dieses Material stellt die Berechnung von Flächen ober- und unterhalb der x-Achse vor und bietet in vielen Übungsaufgaben Schülern die Möglichkeit, zu üben und zu vertiefen. Das Material ist besonders für den Einstieg in die Integralrechnung geeignet, da nur ganzrationale Funktionen Gegenstand sind.
Übersicht über die Teile	1. Orientierte Flächeninhalte 2. Arbeitsblatt 3. Musterlösung
Information zum Dokument	• Ca. 9 Seiten, Größe ca. 690 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

Orientierte Flächeninhalte



Wir starten mit einer Aufgabe: Berechnen Sie das Integral

$\int_{-1}^{1} x^3 dx$.

Die übliche Rechnung ergibt:

$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

Wie beurteilen Sie das Ergebnis?

Sie wissen, dass wir Flächen als Integrale interpretieren können. In der nebenstehenden Skizze sehen Sie den Kurvenverlauf dargestellt und die schraffierte Fläche entspricht dem Wert des Integrals. – Da sind wir beim Thema: Laut Rechnung dürfte dort nämlich gar keine Fläche sein, die wird ja als 0 angegeben! Wie Sie allerdings zweifelsfrei erkennen können, existieren zwei Flächenstücke.

Die Begründung, warum unsere Berechnung nicht das gewünschte Ergebnis liefert, ist die Folgende: Beide Flächenstücke sind gleich groß, aber mit unterschiedlichem Vorzeichen behaftet. Das linke Flächenstück liegt unterhalb der x-Achse, während das rechte oberhalb verläuft. Integrieren wir also ohne Berücksichtigung, dass die Flächen unterschiedlichen Vorzeichens sind, so addieren diese sich zu Null.

Das Integral $\int_{-1}^{0} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ ist negativ. Die Interpretation ist daher, dass sich das Flächenstück oberhalb der Kurven, aber unterhalb der x-Achse befindet, wie Sie an der Skizze leicht ablesen können. Da Flächen nicht negativ sein können, müssen wir bei der Berechnung von dieser den Betrag nehmen:

$$\left|\int_{-1}^{0} x^3 dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}\right| = \left|0 - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

Wenn Sie nicht genau wissen, ob die Flächen im Vorfelde oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen, dann können Sie die Berechnung auch einfach wie gewohnt durchführen und im Nachhinein, wenn sich das Ergebnis als negativ herausstellt, durch die Rechnung Betragsstriche ergänzen.

Die oben gefärbte Fläche ließe sich also wie folgt berechnen:

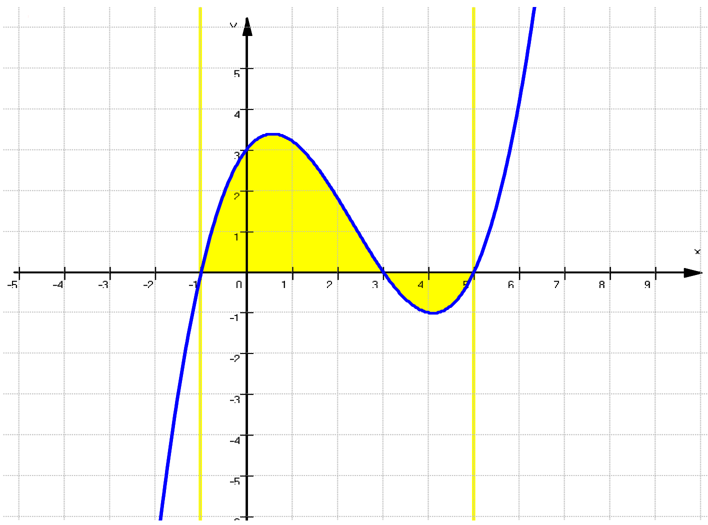
$$A = \left| \int_{-1}^{0} x^3 dx \right| + \int_{0}^{1} x^3 dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} x^3 dx = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Es ist auf Grund der Tatsache, dass beide Flächenstücke gleich groß sind, egal, ob Sie sie einzeln berechnen oder das Doppelte einer Fläche nehmen. Wichtig ist nur, dass Sie erkennen, dass es sich auch tatsächlich um zwei Flächenstücke handelt.

Die Frage, woran Sie nun erkennen, dass eine Fläche nun sowohl oberhalb als auch unterhalb der x-Achse verläuft, lässt sich damit beantworten, dass die Funktion innerhalb des Gebietes, in dem Sie die Fläche berechnen wollen, eine Nullstelle besitzt und somit selbst einen Vorzeichenwechsel der Funktionswerte besitzt. In unserem Beispiel schneidet die Funktion im Ursprung die x-Achse, besitzt also dort eine Nullstelle.

Betrachten Sie ein weiteres Beispiel:

Berechnet werden soll die von der Funktion und der x-Achse eingeschlossene Fläche der Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{5}x^2 + \frac{7}{5}x + 3$.



Wenn Sie den Graphen der Funktion nicht wie hier vorgelegt bekommen, dann müssen Sie zunächst die Integrationsgrenzen ermitteln, das heißt, Sie müssten in diesem Fall zunächst die Nullstellen dieser Funktion bestimmen. Wir können uns dies hier sparen und feststellen, dass

-1, 3 und 5 Nullstellen der Funktion sind, indem wir dies aus der Graphik ablesen.

Der Graphik können Sie auch entnehmen, dass sich daraus wiederum zwei Flächenstücke ergeben, wobei das Flächenstück zwischen x = 3 und x = 5 unterhalb der x-Achse verläuft. Die Gesamtfläche ergibt sich somit zu:

$$A = \int_{-1}^{3} f(x)dx + \left| \int_{3}^{5} f(x)dx \right|$$

E-Mail: info@School-Scout.de ⬩ Internet: http://www.School-Scout.de ⬩ Fax: 02501/26048

Linckensstr. 187 ⬩ 48165 Münster

Thema:	**Partielle Integration (Produktintegration)**
TMD:	
Kurzvorstellung des Materials:	Auch wenn einfache Integrale mithilfe einer Stammfunktion ohne Weiteres lösbar sind, stellen etwas komplexere, zusammengesetze Funktionen, über die integriert werden oder deren Stammfunktion ermittelt werden soll, nicht nur für Schüler oftmals schon ein Problem dar. Das sogenannte Verfahren der partiellen Integration ist eine wichtige Integrationsregel und ist eine Möglichkeit zur Integration eines Produktes von zwei Funktionen. Oft fällt es Schülerinnen und Schüler schwer, dieses Verfahren zu verstehen und entsprechend zu nutzen. Dieses Material verdeutlicht den oft komplexen Rechenvorgang bei der partiellen Integration in fünf detailliert erklärten Schritten. Zu Beginn des Materials werden wichtige Grundlagen der Integralrechnung in Form einer kurzen Wiederholung in Erinnerung gerufen sowie das Verfahren der partiellen Integration anhand eines Beispiels erklärt. Im Anschluss bieten Übungen mit Hilfestellungen dem Schüler die Möglichkeit, das Verfahren selbst anzuwenden und immer mehr zu verstehen. Dazu tragen sehr ausführliche Lösungen bei.
Übersicht über die Teile	• I. Wiederholung und Vorstellung des Verfahrens • II. Aufgaben zur partiellen Integration • III. Hilfestellungen zu den Aufgaben • IV. Lösungen
Information zum Dokument	• Ca. 19 Seiten, Größe ca. 1294 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ⬩ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

I. Das Verfahren der partiellen Integration (Produktintegration)

Wiederholung

Ein Integral mit vorgegebenen Intervallgrenzen kann mithilfe des sogenannten Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung bestimmt werden:

$$\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Dabei ist F(x) eine Stammfunktion zur Integrandenfunktion f. Eine Funktion F ist eine **Stammfunktion** einer Funktion f, wenn die Ableitung von F gleich der Funktion f ist, wenn also $F'(x) = f(x)$ gilt. Man erhält demnach also eine Stammfunktion von f (oder eine Aufleitung von f), indem man die Funktion f integriert: $\int f(x)dx$

Um eine bestimmte Stammfunktion zu einer vorgegebenen Funktion zu ermitteln oder ein bestimmtes Integral zu berechnen, reichen diese Möglichkeiten aber nicht immer aus.

Beispiel: Gesucht ist $\int_0^1 x \cdot e^x dx$
Hier liegt eine Funktion vor, deren Stammfunktion nicht unmittelbar ermittelt werden kann, da diese Funktion ein Produkt aus den Funktionen x und e^x ist. Anders als bei einer Summe ist es nicht erlaubt, das Integral gliedweise zu bestimmen, also über die einzelnen Faktoren zu integrieren:
$\int_0^1 x \cdot e^x dx \neq \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 e^x dx$

Bei so gearteten Aufgaben kann die Anwendung des **Verfahrens der partiellen Integration** oder **Produktintegration** zu einer Lösung führen:

Bei vorgegebenen Intervallgrenzen a und b kann ein Produkt von zwei Funktionen oftmals mit der Formel

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx$$

integriert werden.

Für das Beispiel heißt das: Der Faktor x wird als Funktion $u(x)$ und der Faktor e^x als Funktion $v'(x)$ angesehen. Das heißt, wir interpretieren eine Faktor als $u(x)$ und den anderen als $v'(x)$. Um die Formel anwenden zu können, benötigen wir noch die Ableitung $u'(x)$ von u und die Aufleitung v von $v'(x)$:

$u(x) = x$
$u'(x) = 1$
$v'(x) = e^x$
$v(x) = e^x$

Jetzt können wir die Formel anwenden und erhalten:

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)} dx = [\underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)}]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)} dx$$

$$= [x \cdot e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = e - e + 1 = 1$$

Vorteil : Durch die geschickte Wahl von $u(x)$ und $v'(x)$ wurde das Integral $\int_0^1 \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)} dx$ auf der rechten Seite der Gleichung sehr vereinfacht. Das Produkt $u'(x) \cdot v(x)$ konnte daher wie gewohnt aufgeleitet werden.

Empfohlen werden kann daher folgende Vorgehensweise:

Schritt 1: Überlegen, welcher Faktor des Produkts durch Ableiten das Produkt vereinfacht

Die erste Ableitung von x ist: 1
Die erste Ableitung von e^x ist: e^x

Kombiniere nun jeweils eine Funktion mit der Ableitung der anderen:

Kombinationsmöglichkeit 1: $x \cdot e^x$

Kombinationsmöglichkeit 2: $1 \cdot e^x$

Kombinationsmöglichkeit 2 ist also die bessere Vereinfachung.

Schritt 2: $u(x)$ und $v'(x)$ geeignet wählen

Wähle den Teil der Funktion als $u(x)$, dessen Ableitung unter Schritt 1 die bessere Vereinfachung ergeben hat und den anderen Teil als $v'(x)$.

Der Teil x wird also als Funktion $u(x)$ aufgefasst und der Teil e^x als $v'(x)$

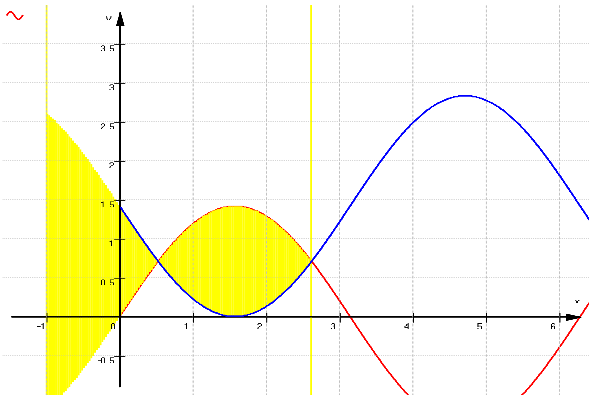
E-Mail: info@School-Scout.de ♦ Internet: http://www.School-Scout.de ♦ Fax: 02501/26048
Linckensstr. 187 ♦ 48165 Münster

Thema:	**Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben zu Stammfunktionen**
TMD:	
Kurzvorstellung des Materials:	Schüler möchten häufig am Ende einer Unterrichtseinheit die Grundlagen nochmals wiederholen. Dieses Material stellt den Begriff der Stammfunktion vor und bietet in vielen Übungsaufgaben Schülern die Möglichkeit, zu üben und zu vertiefen. Das Material ist besonders für den Einstieg in die Integralrechnung geeignet, da nur ganzrationale Funktionen Gegenstand sind.
Übersicht über die Teile	1. Integralrechnung: Wofür braucht man das eigentlich? 2. Der Begriff der Stammfunktion 3. Arbeitsblatt 4. Musterlösung
Information zum Dokument	• Ca. 8 Seiten, Größe ca. 650 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

Integralrechnung: Wozu braucht man das eigentlich ?

Wenn wir einmal die etwas resignierte Antwort „Damit ich die nächste Klausur nicht verhaue" ausser Acht lassen, dann ist das Integral ein mathematisches Konstrukt, dem Sie in allerlei Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik begegnen können, sodass es sich lohnt, mit ihm etwas vertraut zu sein.

Im Mathematik-Unterricht interpretieren wir das Integral hauptsächlich zur Bestimmung von Flächen unter Kurven oder Flächenstücke, die von mehreren Kurven begrenzt werden:



Das Grundrezept, wie man die schraffierte Fläche berechnen kann, werden Sie in diesem Kurs lernen.

In der Physik benötigen Sie ein Integral etwa zur Bestimmung des Schwerpunktes eines starren Körpers, bei der Berechnung von geleisteter Arbeit längs eines krummlinigen Weges oder aber auch beispielsweise zur Bestimmung der Weg-Zeit-Funktion eines bewegten Körpers, wenn Sie die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion kennen, da die Integration im gewissen Sinn die Umkehrung der Differentiation ist:

$$v(t) = s'(t) \Leftrightarrow s(t) = \int v(t)dt$$

Mehr dazu werden Sie auf den folgenden Seiten lernen. Wir beschränken uns im Laufe dieses Kurses auf ganzrationale Funktionen (Polynome), da mit dieser Funktionenklasse auch klassischer Weise im Unterricht das Themengebiet zuerst erschlossen wird.

Sie werden in diesem Kurs keine „trockene Theorie" oder Herleitungen finden (wenn Sie diese interessiert, schlagen Sie in Ihrem Lehrbuch nach), sondern nach kurzen Erklärungen viele Übungen auf Arbeitsblättern, bei denen Sie nicht über Mathematik reden, sondern es „tun" sollen – die ausführlichen Lösungen finden Sie danach auf den folgenden Seiten. Tun Sie sich selbst den Gefallen und konsultieren Sie die Lösungen erst, wenn Sie wirklich nicht mehr weiter wissen!

Und nun lassen Sie uns aufbrechen in das Reich der Integralrechnung – Gute Reise!

Der Begriff der Stammfunktion

Die zentrale Fragestellung ist: Gegeben sei eine Funktion f. Welche Funktion F besitzt f als Ableitungsfunktion? Eine solche Funktion heißt Stammfunktion zu einer Funktion f.

Eine ganzrationale Funktion, also ein Polynom, ist aus Potenzfunktionen zusammen gesetzt. So gilt beispielsweise, dass sich die Funktion f mit $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x$ aus den Potenzfunktionen $3x^4$, $-5x^2$ und $7x$ zusammensetzt.

Allgemein besitzt eine Potenzfunktion die Gestalt $f(x) = k \cdot x^n$. Auf Grund der Tatsache, dass beim Differenzieren gilt, dass die Ableitungsfunktion von einem Grad kleiner als die Ausgangsfunktion ist, muss die Stammfunktion folglich von einem Grad höher sein.

Wir stellen fest, dass gilt:

> Eine Funktion F heißt genau dann Stammfunktion zu einer vorgegebenen Funktion f, falls
>
> $$F' = f.$$
>
> Ist speziell f Potenzfunktion mit $f(x) = k \cdot x^n$, dann gilt:
>
> $$F(x) = \frac{k}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

Wir können uns von der Richtigkeit dessen sofort überzeugen, indem wir zeigen, dass die Ableitung von F die Ausgangsfunktion f reproduziert:

$$F'(x) = \left(\frac{k}{n+1} x^{n+1} + C\right)' = \frac{k}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = k \cdot x^n.$$

Jetzt können Sie sich fragen: „Warum eigentlich muss diese Konstante C am Schluss mitgeschleppt werden?" – denn sie fällt ja schließlich beim Ableiten weg, wie es jede additive Konstante tut.

Dies ist natürlich richtig, aber der Grund liegt darin begraben, dass die Stammfunktion zu einer vorgegeben Funktion f nicht eindeutig definiert ist: So können Sie zum Beispiel zu der Funktion f mit $f(x) = 2x$ sowohl die Funktion $F(x) = x^2 + 7$ oder auch $F(x) = x^2 - \frac{8}{11}$ angeben – beide Funktionen sind Stammfunktionen zu f, da gilt $F' = f$.

Dies ist allerdings auch einsichtig, wenn Sie bedenken, dass die Ableitungsfunktion von F ja geometrisch gesprochen die Steigung der Funktion wiedergibt. Wenn Sie eine Konstante hinzufügen, verschiebt dies nur die Funktion in Richtung der y-Achse nach oben oder unten – an der Steigung ändert sich nichts.

Thema:	**Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben zur Berechnung unbestimmter und bestimmter Integrale**
TMD:	
Kurzvorstellung des Materials:	Schüler möchten häufig am Ende einer Unterrichtseinheit die Grundlagen nochmals wiederholen. Dieses Material stellt den Begriff den Integralbegriff vor und bietet in vielen Übungsaufgaben Schülern die Möglichkeit, zu üben und zu vertiefen. Das Material ist besonders für den Einstieg in die Integralrechnung geeignet, da nur ganzrationale Funktionen Gegenstand sind.
Übersicht über die Teile	1. Unbestimmte und bestimmte Integrale 2. Arbeitsblatt 3. Musterlösung
Information zum Dokument	• Ca. 11 Seiten, Größe ca. 670 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ⬩ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

Unbestimmte und bestimmte Integrale

Wir werden in diesem Abschnitt nicht die Gedanken schrittweise nachvollziehen, die zur Begriffsbildung des Integrals führten oder gar den abstrakten mathematischen Integralbegriff diskutieren – es soll hier ausschließlich um die praktische „Handhabung“ gehen. Wenn Sie an einer Herleitung der Berechnung von Flächeninhalten unterhalb einer Kurven interessiert sind, so lesen Sie bitte die entsprechenden Abschnitte Ihres Lehrwerkes oder gucken Sie in Ihre Unterrichtsaufzeichnungen.

Die im letzten Abschnitt diskutierte Menge der Stammfunktionen bezeichnet man auch als das *unbestimmte Integral* der Funktion f:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Für unsere allgemeine Potenzfunktion gilt somit:

$$\int k \cdot x^n dx = \frac{k}{n+1} x^{n+1} + C$$

Das Integral heißt deshalb unbestimmt, weil platt gesagt keine Grenzen an dem Integralzeichen stehen.

Ein formaler Hinweis: Wenn Sie Integrale notieren, wie oben dargestellt, so müssen Sie beachten, dass quasi das Integralzeichen und das „dx“ eine Einheit bilden – Sie dürfen das „dx“ nicht weglassen, auch wenn es für Sie vielleicht keine weitere Bedeutung hat.

Konsequenterweise bezeichnet man ein Integral mit oberer und unterer Grenze als *bestimmtes Integral* . Die Berechnung dieser erfolgt nach der sogenannten Leibniz-Regel:

Leibniz-Formel:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Sie berechnen somit den Wert eines bestimmten Integrals als Differenz der Funktionswerte der zugehörigen Stammfunktion in den gegebenen Grenzen.

Betrachten wir hierzu ein einfaches Beispiel:

Berechnen Sie $\int_1^3 x^2 dx.$

Als erstes müssen wir die Stammfunktion zu vorgegebener Funktion auftreiben. Es würde gelten:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

An dieser Stelle stolpern wir erneut über die Konstante C. Da jede Belegung der Konstanten eine Stammfunktion darstellt, müsste konsequenterweise auch das Integral für jede Belegung den gleichen Wert haben.

Es gilt nämlich:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_1^3 = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 + C\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 + C\right)}_{F(3)-F(1)}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 + C - C = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$$

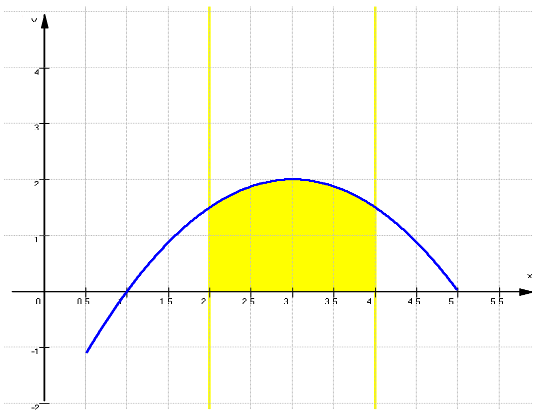
Wie Sie erkennen können, fällt die Konstante aus der Rechnung heraus, wie wir es auch erwarten würden. – Aus diesem Grund wählt man die Konstante fest zu 0 und lässt sie einfach daher unter den Tisch fallen. Man würde also schreiben:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$$

Eines sollte Ihnen klar werden: Das Integral ist ein eigenständiges mathematisches Konstrukt, das weit über die Berechnung von Flächeninhalten unter Kurven hinausgeht (von daher bekommt das obige Ergebnis nicht auch die Einheit „Flächeneinheiten“). Eine Möglichkeit von vielen, das Integral zu *interpretieren*, ist die Flächenberechnung, an die wir uns nun heranwagen wollen.

Betrachten Sie die Funktion f mit

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$. Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche unterhalb der Kurven.



Wie Sie erkennen, ist die Fläche begrenzt von 2 bis 4 auf der x-Achse.

Die zu berechnende Fläche lässt sich interpretieren als das bestimmte Integral

Thema:	**Grundlagen der Integralrechnung: Übungsklausur**
TMD:	
Kurzvorstellung des Materials:	Schüler fragen häufig nach Klausuraufgaben zur besseren Vorbereitung. Dieses Material stellt einen Aufgabenvorschlag dar, der sich besonders an den Grundlagen der Integralrechnung orientiert. An typischen Aufgabenstellungen können Schüler das Gelernte anschaulich für den Ernstfall proben. Das Material ist besonders für den Einstieg in die Integralrechnung geeignet, da nur ganzrationale Funktionen Gegenstand sind.
Übersicht über die Teile	Klausur mit Musterlösung
Information zum Dokument	• Ca. 5 Seiten, Größe ca. 380 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

Übungsklausur

Aufgabe 1

Berechnen Sie die nachstehenden Integrale:

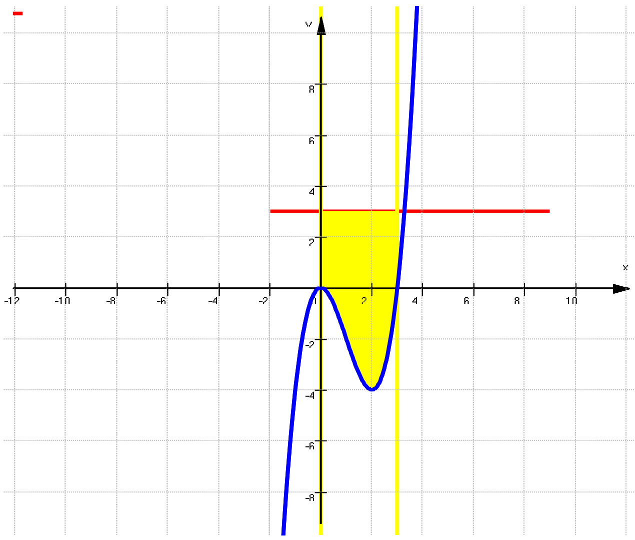
a) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2}x^2 - 6\right) dx$

b) $\int_0^1 \left(\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}\right) dx$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die schraffierte Fläche!

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$



Aufgabe 3

Es sei Ihnen die Funktion f mit

$f(x) = -x^2 + 8x - 12$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

b) Wie groß ist die Fläche, die der Graph der Funktion mit der x-Achse einschließt?

c) Eine Gerade schneidet die Funktion in den Punkten $P_1 = (1\,;\,-5)$ und $P_2 = (5\,;3)$. Berechnen Sie die Größe der Fläche, die die Gerade mit dem Graphen der Funktion f einschließt.

Aufgabe 4

Welche Fläche schließen die Graphen der beiden Funktionen f und g mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$ und $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 5x$ miteinander ein ?

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = x^2 - kx$. Welche Funktion dieser Schar schließt mit der x-Achse eine Fläche von 36 FE ein ?

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Grundlagen der Integralrechnung: Übungsaufgaben und Übungsklausur

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de