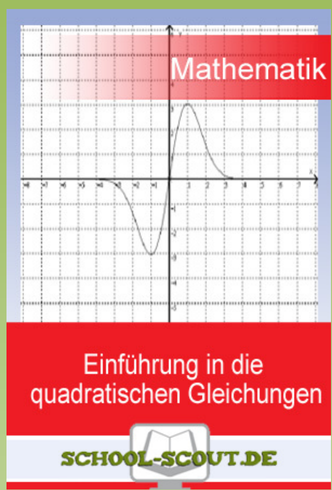
Auszug aus:

Einführung in die quadratischen Gleichungen



Übungsaufgabe 3:

Löse die Gleichungen nach gleichem Muster und gib auch die Lösungsmenge an.

a) $x^2 - 0{,}6x = 0$ b) $x^2 - 3 = 2x - 3$

c) $3x^2 - 12x = 24x$ d) $3x^2 - 12x + 3(x + 4) = 12$

5. Lösen der Allgemeinen Form/ Normalform durch quadratische Ergänzung

Wir haben ja bereits die Allgemeine Form und die Normalform kennen gelernt, aber sie noch nicht gelöst. Eine erste Variante des Auslösens ist die quadratische Ergänzung Hierfür brauchen wir die Normalform. Falls die Allgemeine Form vorliegt, musst du diese erst in die Normalform umformen. Die quadratische Ergänzung wird an einem Beispiel vorgerechnet:

Beispiel:

$x^2 + 4x - 12 = 0$

1. Schritt: Wir suchen das lineare Glied:

$$4x$$

2. Schritt: Lies den Koeffizienten ab:

$$4$$

3. Schritt: Halbiere diesen:

$$4 : 2 = 2$$

4. Schritt: Bilde das Quadrat aus dem Halben:

$$2^2 = 4$$

5. Schritt: Addiere und Subtrahiere das auf der linken Seite der Gleichung:

$$\underline{x^2 + 4x + 4} - 4 - 12 = 0$$

6. Schritt: Du siehst nun, dass das Unterstrichene die erste binomische Formel ist, wobei es auch die zweite sein kann. Bilde nun die binomische Formel und rechne die Zahlen danach zusammen:

$$(x + 2)^2 - 16 = 0$$

7. Schritt: Hole nun die Zahl auf die rechte Seite

$$(x + 2)^2 = 16 \quad (16 = d)$$

8. Schritt: Ziehe nun die Wurzel. Wie auch schon vorher brauchen wir eine Fallunterscheidung: Ist die Zahl auf der **rechten Seite, nennen wir sie „d",** <u>größer als 0</u>, wie im Beispiel, dann gibt es <u>zwei Lösungen</u>. Ist die Zahl <u>gleich 0</u>, dann haben wir nur <u>eine Lösung</u>, und ist sie <u>kleiner als 0</u>, gibt es <u>keine Lösung</u>, da man aus einer negativen Zahl nicht die Wurzel ziehen kann.

$$(x + 2)^2 = 16 \quad / \sqrt{\ }$$

$$x_1 + 2 = 4 \quad / -2 \qquad \rightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 + 2 = -4 \quad / -2 \qquad \rightarrow x_2 = -6$$

9. Schritt: Nun machen wir die Probe, also setzen x_1 und x_2 nacheinander in die Gleichung ein:

$$2^2 + 4 \cdot 2 - 12 = 0 \qquad \rightarrow 0 = 0 \text{ (wahr)}$$

$$(-6)^2 + 4 \cdot (-6) - 12 = 0 \qquad \rightarrow 0 = 0 \text{ (wahr)}$$

10. Also sind x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichungen. Nun nur noch die Lösungsmenge notieren:

$$L = \{-6; 2\}$$

Wenn die Probe nicht wahr ist, dann sind die Lösungen der Gleichung nicht richtig. Dann musst du nochmal nachrechnen.

Übungsaufgabe 4:

Berechne die Lösungen der Gleichung, fülle dabei die Lücken aus.

$x^2 - 12x - 13 = 0$

1. lineares Glied: _____
2. Koeffizienten ablesen: _____
3. Diesen halbieren: _____ : 2 = _____
4. Das Quadrat daraus bilden: $\_\_\_\_\_^2$ = _____
5. Quadrat auf linker Seite addieren und subtrahieren: $x^2 - 12x$ +___-___-13= 0
6. Binomische Formel bilden und zusammenrechnen: $(x\_\_\_\_\_)^2$ _____= 0
7. Zahl auf die andere Seite holen: $(x\_\_\_\_\_)^2$ = _____
8. Wurzel ziehen (Achtung: beachte die 3 Fälle!!!): x_1____ = $+\sqrt{\_\_\_\_\_\_}$ → x_1= ____

   x_2____ = $-\sqrt{\_\_\_\_\_\_}$ → x_2=____
9. Probe: $\_\_\_\_\_^2$ - 12 * _____ - 13 = 0 (wahr)

   $\_\_\_\_\_^2$ - 12 * _____ - 13 = 0 (wahr)
10. Lösungsmenge: L = {____; ____}

Übungsaufgabe 5:

Löse die Gleichungen mit quadratischer Ergänzung. Bilde zuerst die Normalform. Mache auch die Probe und schreibe die Lösungsmenge auf.

a) $3x^2 - 27x + 54 = 0$

b) $0{,}5x^2 - x - 1{,}5 = 0$

c) $4x - 3 = 2x^2 - 19$

d) $(9 + x)^2 = 2(13x + 45)$

E-Mail: info@School-Scout.de ♦ Internet: http://www.School-Scout.de ♦ Fax: 02501/26048
Linckensstr. 187 ♦ 48165 Münster

6. Lösen der Allgemeinen Form/ Normalform durch p-q-Formel

Die p-q-Formel ist die am meisten gebrauchte Lösungsform der quadratischen Gleichungen. Sie ist sehr wichtig und leicht anzuwenden, wenn man die Lösungsformel auswendig kann. Hierfür brauchen wir die Normalform der quadratischen Gleichungen, also müssen wir die Allgemeine Form immer erst in die Normalform umformen.

$x^2 + px + q = 0$

Lösungsformel: $\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} +/- \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}}$ $D = (\frac{p}{2})^2 - q$

also: $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

Achtung: Du musst hier besonders auf die Vorzeichen achten.

Die Lösungsformel, also die quadratische Gleichung, kann, wie du bereits erfahren hast, <u>keine, eine oder zwei Lösungen</u> haben. Bei der Lösungsformel ist bei dieser Unterscheidung der Term unter der Wurzel, die sogenannte <u>Diskriminante (D),</u> wichtig. Dazu machen wir wieder eine Fallunterscheidung:

<u>1. Fall</u>: Ist <u>D>0</u>: es gibt <u>zwei Lösungen</u> nach der Lösungsformel, weil, wenn man die Wurzel aus einer positiven Zahl zieht, bekommt man die positive und die negative Lösung der Wurzel.

<u>2. Fall</u>: Ist <u>D=0</u>: es gibt <u>eine Lösung</u>, da die Wurzel aus 0 ebenfalls wieder 0 ergibt. Somit ist die einzige Lösung der Lösungsformel: $x = -\frac{p}{2}$

<u>3. Fall</u>: Ist <u>D<0</u>: es gibt <u>keine Lösung</u>, weil man die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen muss, was aber nicht geht. Also ist die Lösungsmenge hier leer.

Das Bestimmen und Ausrechnen der Lösungsformel siehst du nun an einem Beispiel:

<u>Beispiel:</u>

$5x^2 - 30x + 25 = 0$

1. Schritt: Forme die Allgemeine Form zur Normalform um:

$x^2 - 6x + 5 = 0$

2. Schritt: Bestimme p und q:

$p = -6; q = 5$

3. Schritt: Setze p und q in die Lösungsformel ein:

$x_{1/2} = -\frac{(-6)}{2} +/- \sqrt{(\frac{(-6)}{2})^2 - 5}$

4. Schritt: Rechne x_1 und x_2 aus, achte auf die Diskriminante:

$x_1 = 3 + \sqrt{(-3)^2 - 5} = 3 + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$

$x_2 = 3 - \sqrt{(-3)^2 - 5} = 3 + \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$

5. Schritt: Probe: Setze x_1 und x_2 in die Gleichung ein:

$5 * 5^2 - 30 * 5 + 25 = 0 \rightarrow 0 = 0$ (wahr)

$5 * 1^2 - 30 * 1 + 25 = 0 \rightarrow 0 = 0$ (wahr)

6. Schritt: Lösungsmenge notieren:

$L = \{1; 5\}$

<u>Übungsaufgabe 6:</u> Löse die Gleichungen mit der p-q-Formel.
Bilde zuerst die Normalform. Achte besonders auf die Diskriminante, ob es keine, eine oder zwei Lösungen gibt. Mache auch die Probe und schreib die Lösungsmenge auf.

a) $-2x^2 - 4x + 160 = 0$ b) $3x^2 - 12x + 12 = 0$ c) $-10x^2 + 60x - 100 = 0$

d) $0{,}5x^2 + 2{,}5x - 7 = 0$ e) $5x^2 - 40x + 85 = 0$ f) $-4x^2 - 12x + 55 = 0$

E-Mail: info@School-Scout.de ♦ Internet: http://www.School-Scout.de ♦ Fax: 02501/26048
Linckensstr. 187 ♦ 48165 Münster

7. Der Satz von Vieta

$$\boxed{\begin{array}{l} I: x_1 + x_2 = -p \\ II: x_1 * x_2 = q \end{array}}$$

Der Satz von Vieta wird oft zur Probe der beiden Lösungen der quadratischen Gleichungen genommen, da hier das Einsetzen von p und q schnell geht und man schnell die beiden Lösungen überprüfen kann.

Beispiel von Seite 11:

$5x^2 - 30x + 25 = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$

Nun setzen wir zur Probe die beiden Lösungen x_1 und x_2 und p und q in die beiden Gleichungen des Satzes von Vieta zur Probe ein:

I: $1 + 5 = -(-6) \rightarrow 6 = 6$ (wahr)

II: $1 * 5 = 5 \rightarrow 5 = 5$ (wahr)

Übungsaufgabe 7:

Mache die Probe mit Hilfe des Satzes von Vieta mit den Lösungen aus Übungsaufgabe 1 a), d) und f).