Auszug aus:

Mathe-Leistungskurs-Klausur Stufe 13, Nr. 3

d) Frischwasser

Es gibt eine konstante Zufuhr von 400 Flöhen pro Stunde, gleichzeitig werden mit 2 Liter Wasser 2/40 Flöhe der Gesamtflöhe aus den 40 Liter herausgenommen. (2/40 = 2 Liter von 40 Litern)

$$dgl2 = \frac{\partial}{\partial t} f_{Neu}(t) = 400 - \frac{1}{20} f_{Neu}(t)$$

$$f_{Neu}(t) = 8000 + 92000 * e^{-\frac{t}{20}}$$

Die Population schrumpft auf 8000 Flöhe.

e) Entnommene Menge

Die entnommene Menge ergibt sich aus dem Integral des „Entnahmeteils" der dgl2:

$$F = \int_0^{24} \frac{2}{40} f_{Neu}(t) = 73890{,}13$$

Insgesamt wurden 73890 Flöhe entnommen.

AUFGABE 2:

a) Bestimmen der Funktionsgleichung

Bedingungen:

1. achsensymmetrisch, da von beiden Seiten spielbar → nur gerade Exponenten
2. stetiger Anschluss an gerades Bahnstück: f(-0,5)=0
3. kein Knick beim Übergang: f'(-0,5)=0
4. glatter Übergang der Krümmung: f''(-0,5)=0
5. verläuft durch (0|0,3): f(0)=0,3

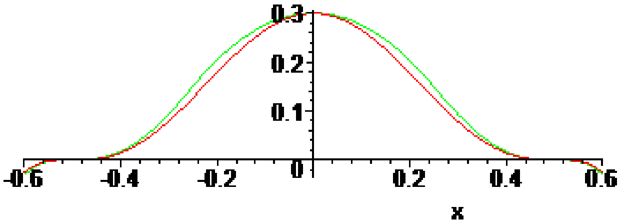
Aus den Bedingungen 2.-5. ergibt sich, dass 4 Variablen bestimmt werden können, da nur gerade Exponenten auftreten, muss eine Funktion 6. Grades gewählt werden.

$$f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$$

Mit den Bedingungen Gleichungen aufstellen und diese lösen:

→ $f(x) = -\frac{96}{5}x^6 + \frac{72}{5}x^4 - \frac{18}{5}x^2 + \frac{3}{10}$

b) Alternative Modellierung (rot → f(x) und grün → g(x))



Die Funktion g (zusammengesetzt aus h und j) muss folgende Bedingungen :

1. achsensymmetrisch
2. h(-0,5)=0
3. h'(-0,5)=0
4. h''(-0,5)=0
5. j(0)=0,3
6. Übergang von h zu j: j(0,25)=h(0,25)
7. j'(0,25)=h'(0,25)
8. j''(0,25)=h''(0,25)

Hieraus ergeben sich 7 Gleichungen, keiner der Exponenten darf ungerade sein. In der Funktionsgleichung tauchen nur 6 Koeffizienten auf, also sind wahrscheinlich nicht alle Bedingungen erfüllt. Entweder muss der eine Abschnitt noch auf Grad 8 oder der andere auf Grad 4 erhöht werden.

c) (1) Größte Steigung

Die größte (maximale) Steigung liegt am Wendepunkt (Maximum der Ableitung) vor.

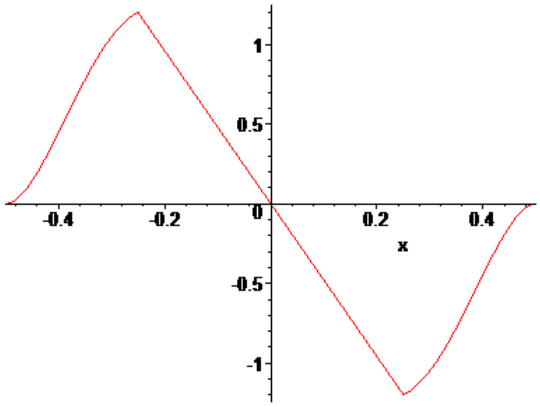
Ableitungen von f und g:

$$f'(x) = 6ax^5 + 4bx^3 + 2cx$$
$$f''(x) = 30ax^4 + 12bx^2 + 2c$$
$$f'''(x) = 120ax^3 + 24bx$$
$$g'(x) = x \leq -0,25; -136,53x^5 + 68,27x^3 - 8,53x; x \leq 0,25; -4,8x; 0,25 < x; -136,53x^5 + 68,27x^3 - 8,53x$$
$$g''(x) = x \leq -0,25; -682,67x^4 + 204,8x^2 - 8,53; x < 0,25; -4,8; 0,25 < x; -682,67x^4 + 204,8x^2 - 8,53$$

Maximum von f': not. Bed.: f''(x)=0 → $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ hinr. Bed.: f'''(x)<0

Die hinreichende Bedingung ist erfüllt. Die Steigung an der Stelle beträgt 1,03.

Die Untersuchung von g liefert keine brauchbaren Ergebnisse, da durch die stückweise Definition Knicke bei den Maxima entstehen.



Am Graphen g'(x) kann man aber deutlich erkennen, dass an der Stelle x=-0,25 das gesuchte Maximum liegt. Die Steigung von g an dieser Stelle beträgt 1,2. D.h. diese Bahn ist steiler als der andere Vorschlag.

(2) Materialkosten

Oberfläche: Länge mal Breite, die Länge errechnet sich aus dem Bogenmaß gemäß der Formel $L = \int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right)^2}\, dx$.

Oberfläche f: 1,085 Oberfläche g: 1,090

Volumen: Grundfläche mal Höhe, Grundfläche entspricht der Querschnittsfläche, zu berechnen mit Hilfe des Integrals.

Volumen f: 0,123 Volumen g: 0,133

Prozentuale Abweichungen ergeben, dass die Längen um 0,5% differieren, die Volumina um ca. 8%. Diese Differenzen sind nur am Rande zu berücksichtigen.

d) Bahn 2

Man legt den Koordinatenursprung auf den Abschlagspunkt. Dann muss der Ball entlang der Bahn -5,1/0,95*x rollen, um direkt ins Loch zu gelangen. Die Bestimmung des y-Wertes auf Höhe der Bande ergibt 2,42m.

Auf Höhe der Bande hat der Ball somit erst 2,42m in y-Richtung zurückgelegt, müsste aber 2,9m erreicht haben wenn der nicht an die Bande treffen soll. Somit funktioniert das Vorhaben nicht.

e) Put mit Bande

Zusammenhang zwischen Steigung vor der Bande und nachher: m1 = -m2

m1=2,22*p m2=-2,22*p

g: Gerade bis zur Bande, h: Gerade nach der Bande

g(x)=m1*x h(x)=m2*x+g(0,45)-0,45*m2

Die Gerade h muss durch (-0,95|5,1) verlaufen. → 1,24m

Alternativ: Spiegelung vom Loch an der verlängerten Außenbande.