Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Einheitskreis ... ist keine Zauberei!

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

Inhalt

EINHEITSKREIS ... ist keine Zauberei!
Einführung in trigonometrische Funktionen & Bogenmaß – Bestell-Nr. P13 081
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

Vorwort

Liebe Lehrkräfte, liebe Schülerinnen und Schüler,

der Einheitskreis ist ein Objekt, dessen Verständnis für die weiterführende und höhere Mathematik, aber auch für die Physik und Technik von grundlegender Bedeutung ist. Dieser Band soll dabei helfen, zu einer möglichst umfassenden Vertrautheit mit den im Einheitskreis verborgenen Zusammenhängen zu gelangen.

Zunächst werden die trigonometrischen Winkelbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck im Überblick wiederholt, also die Definition von Sinus, Kosinus, Tangens und Cotangens als Seitenverhältnisse bezogen auf einen der beiden spitzen Winkel.

Dann lernt man einen wichtigen Schritt kennen: Wenn man ein bekanntes Konzept weiter ausgestalten will, dann kann es angezeigt sein, sich durch Vereinfachung zunächst eine bessere Übersicht zu verschaffen. In unserem Fall ist das der Trick, bei diesen Seitenverhältnissen nur Nenner mit dem Wert 1 zu betrachten. Besonders fruchtbar ist dies nun für Sinus und Kosinus, weil aus Seitenverhältnissen zunächst Strecken und dann Koordinaten von Punkten auf dem Einheitskreis werden.

Um den symmetrischen Aufbau des Einheitskreises zu verstehen, muss man auch mit Winkeln über die 360°-Grenze hinaus rechnen können. Das wird ausführlich anhand eines Pfeilmodells erarbeitet, wobei die geometrische Vorstellung sehr wichtig ist. Man soll sich im Einheitskreis sicher fühlen, auch das Bogenmaß ergibt sich dabei in natürlicher Weise.

Hierbei wird deutlich darauf aufmerksam gemacht, dass man, ausgehend von der Geometrie, jetzt aber bei reellen – insbesondere negativen – Zahlen gelandet ist. Solche Zusammenhänge in der Mathematik zu erkennen ist ganz wesentlich, dabei hält man immer an einer anschaulichen Vorstellung fest. Nun kommt zum rechtwinkligen Dreieck der auf dem Einheitskreis rotierende Punkt hinzu. Es soll zu diesem Zeitpunkt das Aha-Erlebnis gelingen, dass sich die vier Achsenschnittpunkte des Einheitskreises mit den Sinus-/Kosinuswerten 0, 1, –1 ganz problemlos und passend einfügen.

Ein unangenehmes Thema sind die vielen einander sehr ähnlichen Gleichungen für gewisse allgemeine Sinus-/Kosinuswerte. Diese Gleichungen wird man immer wieder miteinander verwechseln, man sollte deshalb nicht versuchen sie auswendig zu lernen. Viel besser ist eben die anschauliche Vorstellung über die im Einheitskreis enthaltenen Dreh- und Spiegelsymmetrien, die ganz genau durch diese Gleichungen ausgedrückt werden.

Zur Festigung dieses anschaulichen Begreifens sind einige spielerische Aufgaben enthalten. Als Hilfe bei der Orientierung wird auch auf das intuitive Wissen über die analoge Uhr und den Kompass zugegriffen und mit dem Einheitskreis in Verbindung gebracht. Genauso wird dabei das interessante Gebiet Algorithmen aus der Informatik genutzt.

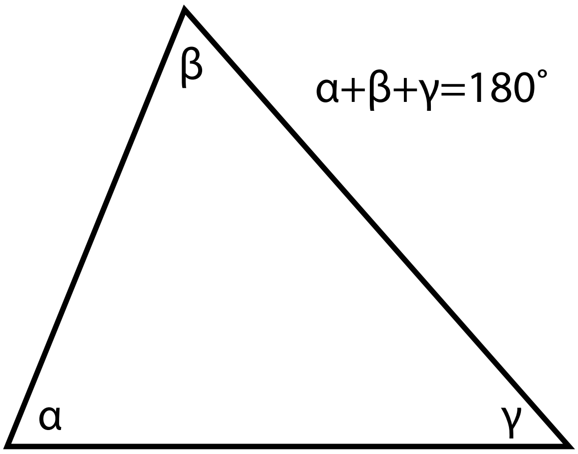
Das wichtigste Ziel ist, allmählich die Angst vor der Komplexität des Themas abzubauen und zu einem sicheren Gefühl für die im Einheitskreis versteckten Zusammenhänge zu gelangen.

Viel Erfolg bei dieser Herausforderung wünschen das Team des Kohl-Verlags und

Christian Neuse

1 Trigonometrische Winkelbeziehungen im Dreieck – Sinus, Kosinus, Tangens und Cotangens

Bekannt sind Winkel aus der Geometrie z. B. im Dreieck, wo die Winkelsumme der drei Winkel 180° beträgt. Wir interessieren uns hier besonders für rechtwinklige Dreiecke, d. h. solche, die einen Winkel von 90° (rechten Winkel) haben. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite nennt man Hypotenuse, die anderen beiden Seiten die Katheten.



Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras:

Das Hypotenusenquadrat ist gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

<u>Aufgabe</u>: *Warum spricht man im rechtwinkligen Dreieck von <u>dem</u> rechten Winkel?*

____

____

____

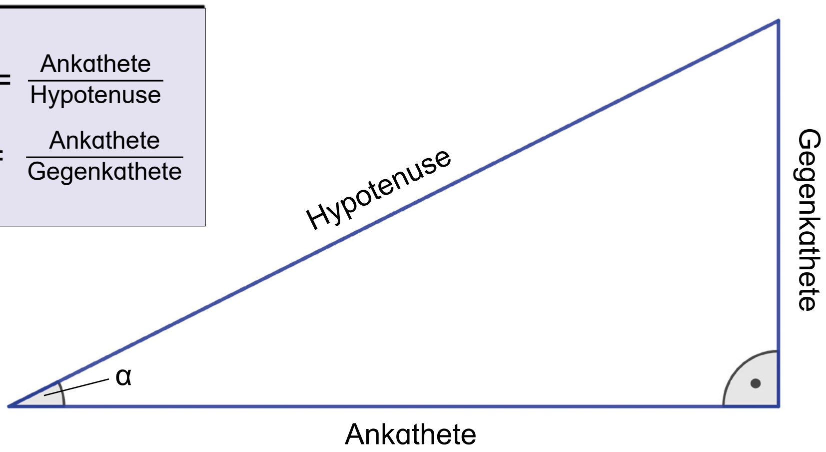
____

____

Wichtig für uns sind die trigonometrischen Winkelbeziehungen Sinus, Kosinus, Tangens und Cotangens eines Winkels α. Sie gelten nur im rechtwinkligen Dreieck und dort nur für die beiden von 90° verschiedenen Winkel. Von dem Winkel α aus betrachtet nennt man die dem Winkel gegenüberliegende Kathete die Gegenkathete und die andere, am Winkel anliegende, die Ankathete. Dann gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$



2 Winkelbeziehungen im 1. Quadranten des Einheitskreises

Der Einheitskreis ist ein Kreis um den Ursprung (0|0) im kartesischen Koordinatensystem mit dem Radius r = 1. Mit dem Ursprung als Eckpunkt wird im 1. Quadranten ein Radius eingezeichnet, sodass der Winkel α zwischen der x-Achse und diesem Radius $0° < \alpha < 90°$ erfüllt.

<u>Aufgabe 1</u>: **a)** *Beschrifte im Bild die beiden blauen und die beiden roten Strecken mit den passenden 4 Winkelbeziehungen und begründe alle Einträge.*

<u>Hinweis</u>: Im Bild sind die rechten Winkel gut zu erkennen. Denk an die Strahlensätze oder an ähnliche Dreiecke.

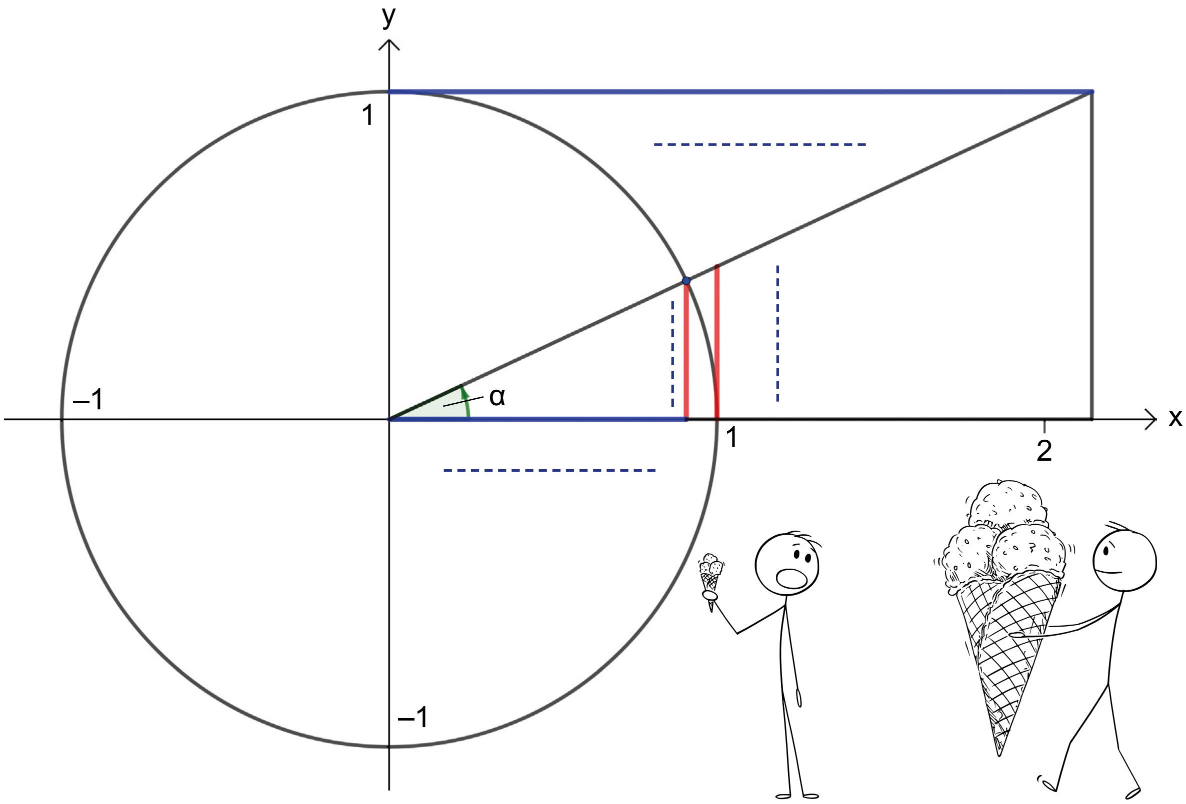
___

___

___

___

___



b) *Schreibe noch einmal die interessanten Gleichungen direkt auf, die sich aus* **a)** *ergeben. Findest du mit dem Satz des Pythagoras noch eine weitere Gleichung?*

___

___

___

___

EINHEITSKREIS ... ist keine Zauberei! Einführung in trigonometrische Funktionen & Bogenmaß – Bestell-Nr. P13 081
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

2 Winkelbeziehungen im 1. Quadranten des Einheitskreises

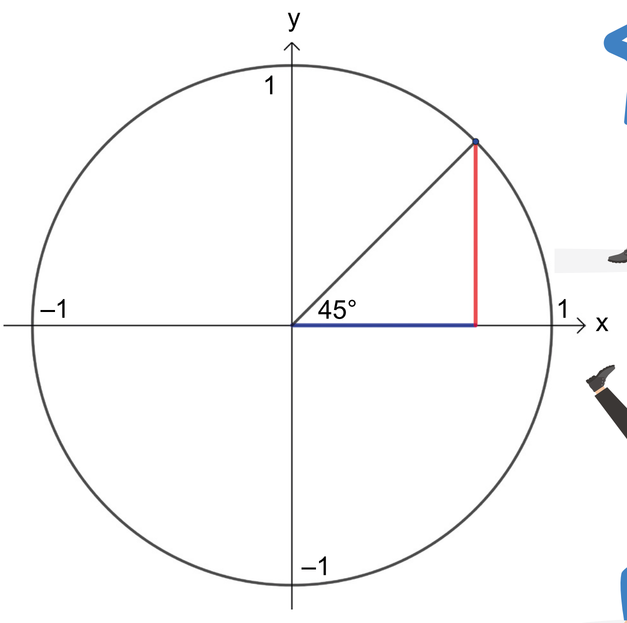
Aufgabe 2: *Fülle mit Hilfe der zu ergänzenden Bilder die Tabelle mit den exakten Werten aus. Begründe deine Überlegungen und Rechnungen. Entferne dabei in Nennern auftretende Wurzeln.*

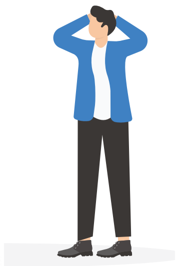
Hinweis:

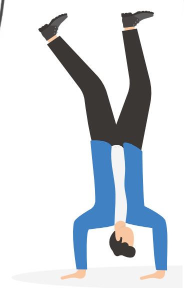
– Denk an Symmetrie, Winkelsumme im Dreieck, besondere Dreiecke, kongruente Dreiecke.

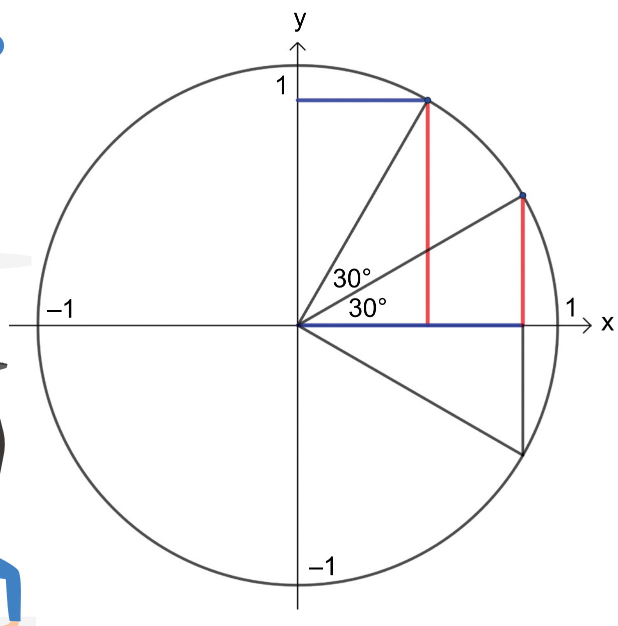
– Ermittle die Werte für Sinus und Kosinus geometrisch; berechne die Werte für Tangens und Kotangens mit Hilfe der Gleichungen, die in Aufgabe 1 b) gefunden wurden.

sin 30° =	cos 30° =	tan 30° =	cot 30° =
sin 60° =	cos 60° =	tan 60° =	cot 60° =
sin 45° =	cos 45° =	tan 45° =	cot 45° =









EINHEITSKREIS ... ist keine Zauberei!
Einführung in trigonometrische Funktionen & Bogenmaß – Bestell-Nr. P13 081
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

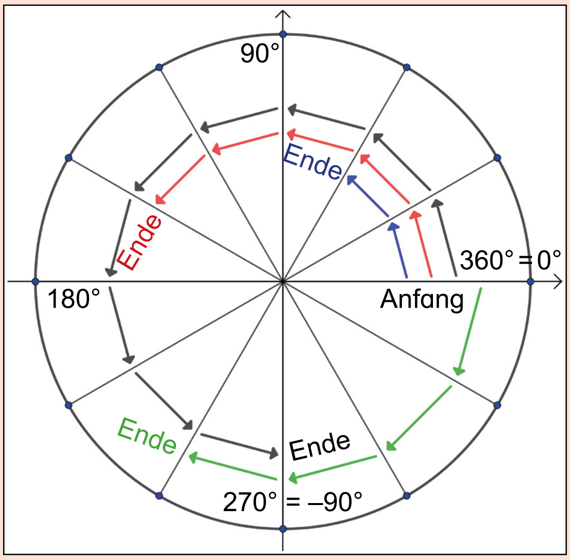
3 Addition von positiven und negativen Winkeln geometrisch – Kommutativgesetz

Im Einheitskreis gibt es positive und negative Winkel, hierfür müssen wir uns eine geeignete Vorstellung erarbeiten. Zunächst kann man Winkel im Einheitskreis ganz normal addieren, z. B. 30° + 120° = 150°. Ein Problem ist dabei: Der größte darstellbare Winkel ist 360°, sozusagen der volle Kreis. Was ist also z. B. 270° + 150°? Auch dazu kommen wir später.

Was ist eine Addition geometrisch? Jeder positive Winkel beginnt an der x-Achse und wird von da aus im Gegenuhrzeigersinn abgetragen. Wenn man sich einen positiven Winkel vorstellt als Kette aus lauter kleinen gleichlangen Pfeilen, dann kann man das Addieren gut am Bild nachvollziehen. Diese Kette beginnt an der x-Achse und verläuft „gegen die Uhr", während ein negativer Winkel durch eine von der x-Achse im Uhrzeigersinn ausgehende Kette dargestellt wird. Die letzte Pfeilspitze der Kette zeigt dann genau den dargestellten Winkel an.

> Pfeilanfang ⟶ Ende vom Pfeil
> Der Anfang einer Kette ist der Anfang des ersten Pfeils, das Ende einer Kette ist das Ende des letzten Pfeils.

Genau so sind (von innen nach außen) die Winkel 60°, 150°, 270° und –120° im Bild eingezeichnet.



Zur Addition zweier Winkel wird nun die Kette der zweiten Zahl so weit „gegen die Uhr" gedreht, bis ihr Anfang an das Ende der Kette der ersten Zahl angefügt werden kann. Die letzte Pfeilspitze der neu gebauten Kette zeigt dann genau die Winkelsumme an. Dies kann man sich für 60° + 150° = 210° und (–120°) + (–120°) = –240° noch gut bildlich vorstellen. Daher könnte man durch eine naheliegende Überlegung anhand dieser einfachen Beispiele vermuten:

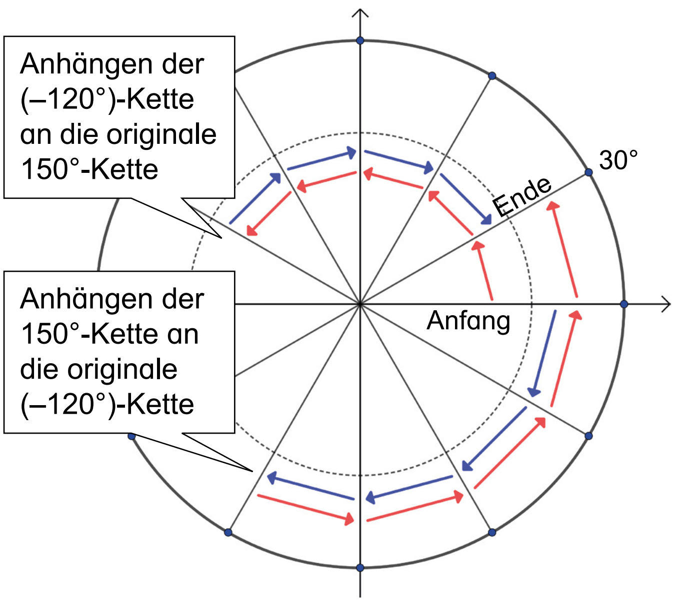
> Bei der Addition von Winkeln gilt das Kommutativgesetz: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ für alle Winkel α, β

Aufgabe 1: *Begründe anschaulich anhand des Kettenmodells für solche einfachen Beispiele das Kommutativgesetz bei der Winkeladdition.*

____

____

Wie sieht es aber bei 150° + (–120°) = (–120°) + 150° aus? Auch in diesem Fall wird die eine Kette an die andere gehängt, dort entsteht einfach nur ein Knick. Rechts im Bild ist der linke Teil der Gleichung oben und der rechte Teil unten rechts dargestellt. Beide Summen-Ketten mit je 9 Pfeilen reichen von der x-Achse bis zum Ergebnis 30°.



Es gibt noch viele andere Möglichkeiten, diese 9 Pfeile aneinanderzuhängen, zwei davon kommen in der Aufgabe 2 a) und b) vor.

> Zur besseren Übersicht zeichnen wir Ketten so: Sie beginnen weiter innen und knicken nach außen um.

EINHEITSKREIS ... ist keine Zauberei! Einführung in trigonometrische Funktionen & Bogenmaß – Bestell-Nr. P13 081
KOHL VERLAG

Einheitskreis

... ist keine Zauberei

1. Digitalauflage 2024

Inhalt: Christian Neuse
Coverbild: s. Bildnachweise © AdobeStock
Redaktion: Kohl-Verlag
Grafik & Satz: Kohl-Verlag

Bestell-Nr. P13 081

ISBN: 978-3-98841-626-1

Bildnachweise © AdobeStock
Coverbild: klyaksun, bullet_chained, Amarylle, DrawingMyDiary; **S. 5:** Butterfly2023, blueringmedia; **S. 6:** Zdenek Sasek; **S. 7:** WS DESIGN; **S. 12:** DM7; **S. 13:** 32 pixels, 3Dmask; **S. 19:** Iaroslav, HandmadePictures, ylivdesign; **S. 20:** DM7; **S. 22:** Photix Studio; **S. 23:** nsit0108; **S. 24:** Photix Studio; **S. 28:** Lumos sp; **S. 29:** the8monkey (2x); **S. 30:** steheap; **S. 33:** BigJoy; **S. 42:** Photix Studio; **S. 44:** steheap.

Bildnachweise © wikipedia.org
S. 18: Lucas Vieira; **S. 30:** CRJO-CRJO, Qa003qa003; **S. 31:** Radzkore; **S. 44:** CRJO-CRJO, Qa003qa003.

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Einheitskreis ... ist keine Zauberei!

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de