Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Stochastik: Wartezeitprobleme und zugehörige Verteilungen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de


Wartezeitprobleme und zugehörige Verteilungen

Alfred Müller

© Tero Vesalainen / iStock / Getty Images Plus

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist häufig nicht nur die Frage nach Erfolg oder Misserfolg relevant, sondern auch, wie viele Versuche es braucht, bis sich der erste Erfolg einstellt. Die Schülerinnen und Schüler lernen solche Wartezeitprobleme im Zusammenhang mit verschiedenen Zufallsexperimenten und verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen kennen. Vorgerechnete Beispiele demonstrieren den Lernenden verschiedene Lösungswege, ehe sie sich selbst daranmachen, Wartezeitprobleme der Pascalverteilung, der negativen Binomialverteilung und der geometrischen Verteilung zu bearbeiten.

RAABE KLASSE SCHULE

Wartezeitprobleme und zugehörige Verteilungen

Alfred Müller

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist häufig nicht nur die Frage nach Erfolg oder Misserfolg relevant, sondern auch, wie viele Versuche es braucht, bis sich der erste Erfolg einstellt. Die Schülerinnen und Schüler lernen solche Wartezeitprobleme im Zusammenhang mit verschiedenen Zufallsexperimenten und verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen kennen. Vorgerechnete Beispiele demonstrieren den Lernenden verschiedene Lösungswege, ehe sie sich selbst daranmachen, Wartezeitprobleme der Pascalverteilung, der negativen Binomialverteilung und der geometrischen Verteilung zu bearbeiten.

RAABE
KLASSE SCHULE

Wartezeitprobleme und zugehörige Verteilungen

Oberstufe (weiterführend/vertiefend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

die Wahrscheinlichkeitsrechnung in verschiedenen Varianten von Wartezeitproblemen einzusetzen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt **BA** Bildanalyse **Bsp** vorgerechnetes Beispiel

Thema	Material	Methode
Wartezeitprobleme und geometrische Verteilung	M1, M3	AB, BA, Bsp
Maßzahlen der geometrischen Verteilung	M2	AB, Bsp
Wartezeitprobleme bei Pascalverteilung und negative Binomialverteilung	M4, M6	AB, Bsp
Mittlere Wartezeit und Maßzahlen der Pascalverteilung	M5	AB, Bsp
Wartezeit und vollständige Serie	M7	AB, BA, Bsp

Kompetenzprofil:

Inhalt: Wartezeitprobleme, Binomialverteilung, geometrische Verteilung, Pascalverteilung, negative Binomialverteilung, bedingte Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramme

Medien: Taschenrechner, Tabellenwerk

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Wartezeit und geometrischen Verteilung

M1

Ein Bernoulli-Experiment werde so lange unabhängig durchgeführt, bis zum ersten Mal ein „Erfolg“ (alternativ: „Treffer“, „1“) eintritt.

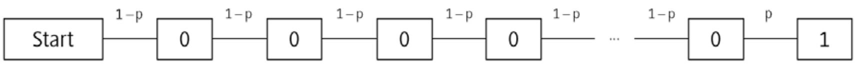
Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg sei jeweils:

P(„Erfolg“) = P(„Treffer“) = P(1) = p

Die Wahrscheinlichkeit für einen „Misserfolg“ (alternativ: „Niete“, „0“) sei:

P(„Misserfolg“) = P(„Niete“) = P(0) = 1 - p

Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Versuche an, bis zum ersten Male „Erfolg“ auftritt. Aus dem zugehörigen Baumdiagramm erkennt man:



Grafik: Günter Gerstbrein

Dem ersten Erfolg gehen (k – 1) Misserfolge voraus. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Z gilt:

$$P(Z = k) = \left(1 - p\right)^{k-1} \cdot p, \ \ k \in \mathbb{N}$$

Eine Zufallsgröße Z mit dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **geometrisch verteilt** mit dem (Erfolgs-)Parameter p.

Anmerkungen:

1. Der Name **geometrische Verteilung** leitet sich von der Tatsache ab, dass zur Berechnung der Summe aller Wahrscheinlichkeiten die Summenformel für die unendliche geometrische Reihe verwendet werden muss. Es gilt:
$$\sum_{k=1}^{\infty} P(Z = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} \cdot p = p\left[1 + (1 - p) + (1 - p)^2 + \ldots\right] = p \cdot \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1$$
Wegen 0 < p < 1 bzw. 0 < 1 – p < 1 ist die geometrische Reihe konvergent, sodass die Summenformel für die geometrische Reihe angewendet werden kann.
Die geometrische Reihe ist konvergent für 0 < x < 1 und es gilt:
$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1 - x}$$

2. Falls die Ausführung des Zufallsexperiments genau eine Zeiteinheit dauert, so gibt die geometrisch verteilte Zufallsgröße Z die Zeit an, die vergeht, bis zum ersten Mal Erfolg (oder ein Treffer) eintritt. Man sagt dann, dass die Zufallsgröße Z die **Wartezeit** bis zum ersten Erfolg angibt.
3. Für die (kumulative) Verteilungsfunktion F erhält man: $F(z) = P(Z \leq z) = \sum_{k \leq z} (1-p)^{k-1} \cdot p$

Beispiel

Beim Spiel „Mensch ärgere dich nicht" sehen die Spielregeln vor, dass ein Teilnehmer erst dann starten darf, wenn er eine Sechs gewürfelt hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bis zum vierten Versuch warten muss, bis man die erste Sechs würfelt?

Lösung:

Wenn die Zufallsgröße Z die Anzahl der Würfe angibt, bis man das Spiel beginnen kann, dann ist Z geometrisch verteilt mit $p = \frac{1}{6}$. Dann gilt:

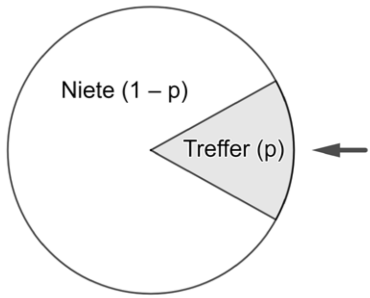
$$P(Z = 4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}09645 = 9{,}65\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 9,65 % darf man erst nach dem vierten Versuch beginnen.

Aufgaben

1. Geben Sie zur geometrischen Verteilung mit p = 0,4 die Wertetabelle der Verteilung und die kumulative Verteilungsfunktion an. Zeichen Sie ein Stabdiagramm und den Graphen der Verteilungsfunktion.

2. Auf einem Glücksrad ist wie in der nebenstehenden Skizze ein Sektor anders eingefärbt. Zeigt der Pfeil nach einer Drehung des Rades auf diesen Sektor, so spricht man von einem Treffer T, sonst von einer Niete N. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer sei p mit $0 < p < 1$.
Das Glücksrad wird dreimal gedreht.



Grafik: Günter Gerstbrein

a) Zeigen Sie, dass für das Ereignis E: „Genau zwei Treffer" $P(E) = 3p^2 \cdot (1 - p)$ gilt und bestimmen Sie den Wert für p so, dass $P(E)$ maximal wird.

b) Das unter 2a) beschriebene Zufallsexperiment wird zu einem Glücksspiel verwendet. Man gewinnt, wenn sich das Ereignis E einstellt. Dazu wird $P(E) = \frac{4}{9}$ verwendet. Das Glücksspiel wird fünfmal gespielt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man
(i) nur einen Gewinn,
(ii) den erste Gewinn beim fünften Spiel,
(iii) nur Gewinne?

c) Wie oft darf das Glücksspiel höchstens gespielt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens einmal gewinnt, unter 90 % bleibt?

M2 Mittlere Wartezeit und Maßzahlen der geometrischen Verteilung

Wenn man beim Werfen eines sechsseitigen Würfels fragt, wie oft man im Mittel würfeln muss, um erstmals eine Sechs zu erhalten, fragt man nach dem Erwartungswert E(Z) der Zufallsgröße Z. Allgemein fragt man also, wie oft man im Mittel ein Zufallsexperiment ausführen muss, um zum ersten Mal einen Erfolg (Treffer) zu erhalten.
Der Erwartungswert E(Z) einer geometrisch verteilten Zufallsgröße Z wird mithilfe der Definition des Erwartungswertes berechnet. Es gilt:

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(Z=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p$$

Dabei bezeichnet $q = 1 - p$ die Gegenwahrscheinlichkeit zu p.

In der zu berechnenden Summe tritt der Ausdruck $k \cdot q^{k-1}$ auf. Er entsteht auch, wenn man mithilfe der Analysis q^k einmal nach q ableitet. Mit der Differentiationsregel, dass die Ableitung einer Summe gleich der Summe der Ableitungen ist und der Konvergenz der geometrischen Reihe für 0 < q < 1 gilt:
Eine geometrisch verteilte Zufallsgröße Z hat den *Erwartungswert* $E(Z) = \frac{1}{p}$.

Die Varianz einer geometrisch verteilten Zufallsgröße wird mithilfe des Verschiebungssatzes $\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$ berechnet.
Dazu benötigt man den Ausdruck

$$E(Z^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot P(Z=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} \cdot p$$

Hilfsweise wird jetzt der Ausdruck $E(Z^2) - E(Z)$ berechnet. Es gilt:

$$\begin{aligned} E(Z^2) - E(Z) &= E[Z(Z-1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \cdot P(Z=k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) q^{k-1} p = p \cdot q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) q^{k-2} \end{aligned}$$

Der Ausdruck $k \cdot (k-1) q^{k-2}$ entsteht, wenn man mithilfe der Analysis q^k zweimal nach q ableitet. Mit den Überlegungen von oben erhält man:

Wartezeitprobleme und zugehörige Verteilungen

Alfred Müller

© Tero Vesalainen / iStock / Getty Images Plus

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist häufig nicht nur die Frage nach Erfolg oder Misserfolg relevant, sondern auch, wie viele Versuche es braucht, bis sich der erste Erfolg einstellt. Die Schülerinnen und Schüler lernen solche Wartezeitprobleme im Zusammenhang mit verschiedenen Zufallsexperimenten und verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen kennen. Vorgerechnete Beispiele demonstrieren den Lernenden verschiedene Lösungswege, ehe sie sich selbst daranmachen, Wartezeitprobleme der Pascalverteilung, der negativen Binomialverteilung und der geometrischen Verteilung zu bearbeiten.

RAABE, KLASSE SCHULE