Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Verteilung diskreter Zufallsgrößen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

Verteilung diskreter Zufallsgrößen – Beispiele und Übungsaufgaben

Carlo Vöst

Wikimedia Commons [gemeinfrei gestellt]

In diesem Unterrichtsmaterial rund um Zufallsgrößen erarbeiten sich die Lernenden zunächst anhand von Beispielen zentrale Begriffe wie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung. Ferner wird den Schülerinnen und Schülern gezeigt, wie man sich durch verschiedene graphische Darstellungsmöglichkeiten einen Überblick über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgrößen verschaffen kann. Nach einigen Übungsaufgaben steht am Ende der Einheit eine Lernerfolgskontrolle zur Verfügung.

RAABE KLASSE SCHULE

Verteilung diskreter Zufallsgrößen – Beispiele und Übungsaufgaben

Carlo Vöst

Wikimedia Commons [gemeinfrei gestellt]

In diesem Unterrichtsmaterial rund um Zufallsgrößen erarbeiten sich die Lernenden zunächst anhand von Beispielen zentrale Begriffe wie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung. Ferner wird den Schülerinnen und Schülern gezeigt, wie man sich durch verschiedene graphische Darstellungsmöglichkeiten einen Überblick über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgrößen verschaffen kann. Nach einigen Übungsaufgaben steht am Ende der Einheit eine Lernerfolgskontrolle zur Verfügung.

RAABE KLASSE SCHULE

Verteilung diskreter Zufallsgrößen – Beispiele und Übungsaufgaben

Oberstufe (grundlegend)

Carlo Vöst

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

mit Zufallsgrößen in der Stochastik angemessen umzugehen. Die Lernenden erhalten einen Überblick über wichtige Konstrukte und Begriffe wie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung. Außerdem werden Sie in der graphischen Darstellung von Zufallsgrößen geschult.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
AB Arbeitsblatt **LEK** Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Einführendes Beispiel	M1	AB
Erwartungswert	M2	AB
Varianz und Standardabweichung	M3	AB
Graphische Darstellungen von Zufallsgrößen	M4	AB
Aufgaben	M5	AB
Klassenarbeit	M6	LEK

Kompetenzprofil:

Inhalt: Grundsätzliche Definition der Zufallsgröße, Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße, graphische Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße
Medien: Taschenrechner
Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Erklärung zu den Symbolen

einfaches Niveau

mittleres Niveau

schwieriges Niveau

Zusatzaufgaben

Alternative

Hinweise

Lernvoraussetzungen

Die Jugendlichen kennen wichtige Grundbegriffe der Stochastik wie Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis und Wahrscheinlichkeit. Die Lernenden verfügen bereits über hinreichend Erfahrung in der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei allen gängigen Zufallsexperimenten in der Stochastik, wie Würfeln, aus einer Urne ziehen, Glücksrad, etc. Auch der Funktionsbegriff sollte den Schülerinnen und Schülern bekannt sein.

Lehrplanbezug

Im Kernlernplan https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen Die Schülerinnen und Schüler ...

– erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen,
– bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen.

Methodisch-didaktische Anmerkungen

Die Unterrichtseinheit ist so aufgebaut, dass nach einem einführenden Beispiel (**M1**) die wichtigen Begriffe des Erwartungswerts (**M2**), der Standardabweichung und der Varianz (**M3**) diskutiert werden. Bei **M4** wird anschaulich erklärt, wie Zufallsgrößen graphisch dargestellt werden können. Das Material **M5** können die Schülerinnen und Schüler für das Einüben des erworbenen Wissens verwenden. Bei den einzelnen Aufgaben gilt es folgendes zu beachten:

Bei Aufgabe 1a können Sie als Lehrkraft vor der Bearbeitung im Unterricht klären, worauf es bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit von kombinatorischen Möglichkeiten bei einem dreifachen Würfelwurf ankommt.

Bei Aufgabe 1b ist der Einsatz eines CAS-Rechners oder eines Algebra-Programms (*GeoGebra*) auf Laptop oder Tablet zu empfehlen.

Auch bei Aufgabe 2a besprechen Sie mit den Schülerinnen und Schülern im Vorfeld die kombinatorischen Möglichkeiten, die es für die Bildung der Quersumme gibt.

Vor der Bearbeitung der Aufgabe 3 können Sie fachübergreifend über die Bildung politischer Ausschüsse aufgeteilt auf Parteien informieren.

In den Aufgaben 6 und 7 tauchen Parameter auf. Sprechen Sie noch einmal mit den Lernenden darüber, was in der Mathematik ein Parameter ist; nämlich ein fester unbekannter Zahlenwert, den man (noch) nicht kennt.

In der achten Aufgabe ist es wichtig, genau zu erklären (ggf. mit einer graphischen Darstellung), was die betragsmäßige Abweichung vom Erwartungswert bedeutet.

Die Aufgabe 11 ist eine sogenannte offene Aufgabenstellung, das heißt, es gibt viele Lösungsmöglichkeiten. Diese Aufgabe erfordert deshalb besonderes Geschick und eignet sich daher für leistungsstärkere Jugendliche.

Einführendes Beispiel M1

Werfen eines Laplace-Würfels. Ergebnisraum: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Wir definieren eine Funktion X, Zufallsgrößenfunktion oder Zufallsgröße (ZG) genannt, die den Elementen des Ergebnisraums reelle Zahlenwerte zuweist. (Anmerkung: die Bezeichnung X anstelle von f, wie in der Analysis üblich, ist historisch bedingt.)

Wir legen beispielsweise (willkürlich, in diesem Beispiel) fest, dass die Funktion X den Funktionswert 2 haben soll, wenn 1 geworfen wird, bei jeder anderen geworfenen ungeraden Zahl den Wert 0 und den Wert 1 bei einer geraden Zahl. Überblick:

$$X: \begin{cases} \omega_1 = 1 \mapsto 2 \\ \omega_2 = 2 \mapsto 1 \\ \omega_3 = 3 \mapsto 0 \\ \omega_4 = 4 \mapsto 1 \\ \omega_5 = 5 \mapsto 0 \\ \omega_6 = 6 \mapsto 1 \end{cases}$$

Allgemein gilt dann

$$X: \ \omega_i \mapsto r \ \left(i \in \{1,2,3,4,5,6\}; r \in \mathbb{R}\right).$$

Die Wertemenge von X ist also in diesem Beispiel

$$W_X = \{0; 1; 2\}.$$

In der Analysis bezeichnet man die Funktionswerte einer Funktion f mit f(x), hier benennt man die Funktionswerte von X mit x, also

$$X(\omega) = x.$$

Im vorliegenden Beispiel nutzen wir die Bezeichnungen

$$x_1 = 0; \ x_2 = 1; \ x_3 = 2.$$

Es gilt für alle Elementarereignisse $\{\omega_i\}$ die Wahrscheinlichkeit

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6} \ \left(i \in \{1,2,3,4,5,6\}\right).$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße z. B. den Wert 1 annimmt, ist damit

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Wir nutzen u. a. die Schreibweise

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Beachten Sie die verschiedenen möglichen Schreibweisen

$$P(X=0)=P(0)=P(x_1)=P\left(\left\{\omega \middle| X(\omega)=x_1\right\}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$
$$P(X=1)=P(1)=P(x_2)=P\left(\left\{\omega \middle| X(\omega)=x_2\right\}\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$
$$P(X=2)=P(2)=P(x_3)=P\left(\left\{\omega \middle| X(\omega)=x_3\right\}\right)=\frac{1}{6}.$$

Für die erste Zeile wird dann folgende Sprechweise genutzt:
„Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X den Wert 0 annimmt, ist $\frac{1}{3}$.“
Diese Herleitung führt uns zu den folgenden Definitionen.

Definition
Sei $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ \ldots\ ,\omega_n\}$ der Ergebnisraum eines beliebigen Zufallsexperiments. Dann versteht man unter einer Zufallsgrößenfunktion (meist nur kurz Zufallsgröße oder ZG genannt) eine Funktion X von Ω nach $\mathbb{R}$; also: $X:\ \Omega\to\mathbb{R}$.

Definition
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion w ordnet jedem Wert einer Zufallsgröße X seine Wahrscheinlichkeit P(X = x) zu und hat den Wert 0 für alle anderen reellen Zahlen, die nicht in der Wertemenge W_X von X vorkommen:

$$w:\ x\mapsto\begin{cases}P(X=x), & \text{falls } x\in W_X\\ 0, & \text{falls } x\notin W_X\end{cases}.$$

In unserem Beispiel ergibt sich also

$$w:\ \begin{cases}0\mapsto\frac{1}{3}\\ 1\mapsto\frac{1}{2}\\ 2\mapsto\frac{1}{6}\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}\mapsto 0\end{cases}.$$


Verteilung diskreter Zufallsgrößen – Beispiele und Übungsaufgaben

Carlo Vöst

Wikimedia Commons [gemeinfrei gestellt]

In diesem Unterrichtsmaterial rund um Zufallsgrößen erarbeiten sich die Lernenden zunächst anhand von Beispielen zentrale Begriffe wie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung. Ferner wird den Schülerinnen und Schülern gezeigt, wie man sich durch verschiedene graphische Darstellungsmöglichkeiten einen Überblick über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgrößen verschaffen kann. Nach einigen Übungsaufgaben steht am Ende der Einheit eine Lernerfolgskontrolle zur Verfügung.

RAABE KLASSE SCHULE