Auszug aus:

Wahrscheinlichkeiten bei einer Kugelpyramide

Wahrscheinlichkeiten bei einer Kugelpyramide – Anwendungsaufgaben zur Stochastik

Ein Beitrag von Günther Weber

Foto: Günther Weber

Pyramiden sind Schülerinnen und Schülern als geometrische Körper bzw. aus dem alltäglichen Leben bekannt. Setzt man eine Pyramide aus Kugeln zusammen und versieht die einzelnen Kugeln auf der Oberfläche (Mantelfläche) der Pyramide jeweils mit einem Punkt, so bieten die bepunkteten Kugeln die Grundlage für unterschiedliche Zufallsexperimente.
Zur Lösung der Aufgaben setzen die Jugendlichen (vereinfachte) Baumdiagramme, bedingte Wahrscheinlichkeiten, die Binomialverteilung oder Sigma-Intervalle ein. Zudem überprüfen sie, ob zwei Ereignisse stochastisch abhängig oder unabhängig sind; sie testen Hypothesen und berechnen den Fehler 2. Art beim Hypothesentest.

RAABE, KLASSE SCHULE

Wahrscheinlichkeiten bei einer Kugelpyramide – Anwendungsaufgaben zur Stochastik

Ein Beitrag von Günther Weber

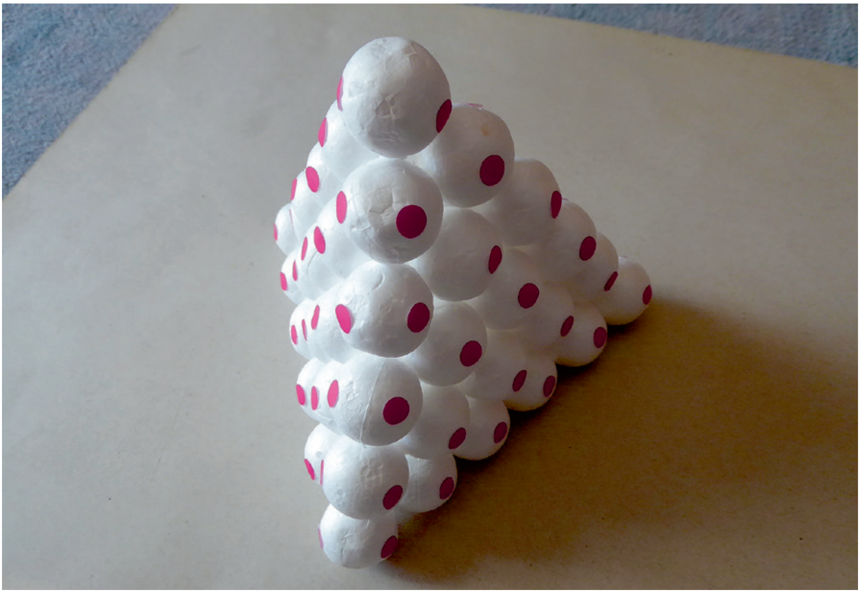


Foto: Günther Weber

Pyramiden sind Schülerinnen und Schülern als geometrische Körper bzw. aus dem alltäglichen Leben bekannt. Setzt man eine Pyramide aus Kugeln zusammen und versieht die einzelnen Kugeln auf der Oberfläche (Mantelfläche) der Pyramide jeweils mit einem Punkt, so bieten die bepunkteten Kugeln die Grundlage für unterschiedliche Zufallsexperimente.

Zur Lösung der Aufgaben setzen die Jugendlichen (vereinfachte) Baumdiagramme, bedingte Wahrscheinlichkeiten, die Binomialverteilung oder Sigma-Intervalle ein. Zudem überprüfen sie, ob zwei Ereignisse stochastisch abhängig oder unabhängig sind; sie testen Hypothesen und berechnen den Fehler 2. Art beim Hypothesentest.

RAABE
KLASSE SCHULE

Wahrscheinlichkeiten bei einer Kugelpyramide – Anwendungsaufgaben zur Stochastik

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Ein Beitrag von Günther Weber

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

Ereigniswahrscheinlichkeiten mithilfe von teils komplexen Baumdiagrammen zu bestimmen. Die Lernenden festigen ihr Können und Wissen über die Bestimmung von (bedingten) Wahrscheinlichkeiten, indem sie für zugehörige Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeiten auf unterschiedliche Arten bestimmen. Dies geschieht ebenso bei der Überprüfung auf stochastische (Un-)Abhängigkeit zweier Ereignisse. Die Jugendlichen berechnen Erwartungswerte und überprüfen, ob ein Spiel fair ist. Anhand der Binomialverteilung berechnen sie Wahrscheinlichkeiten, schätzen mithilfe der σ-Regeln Anzahlen und überprüfen eine Hypothese.
Für größere Kugelpyramiden leiten die Jugendlichen aus der Kugelanzahl Funktionen her. Mit diesen bestimmen sie die Höhe der Pyramide, sodass bestimmte Eigenschaften erfüllt sind.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt **BA** Bastelanleitung **BI** Bildmaterial

einfaches Niveau mittleres Niveau schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Beschreibung der Kugelpyramide	M1	BA, BI
Aufgaben	M2	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Laplace-Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische (Un-)Abhängigkeit, Binomialverteilung, Erwartungswert, faires Spiel, Sigma-Intervall, Testen von Hypothesen, Bestimmen von Funktionstermen, Maximum

Medien: GTR/CAS, Excel

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Lernvoraussetzungen

Ihre Klasse kennt verkürzte Baumdiagramme und die Pfadregeln. Die Lernenden berechnen Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen mit Zurücklegen sowie bedingte Wahrscheinlichkeiten ohne Schwierigkeiten. Eventuell kennen Ihre Schülerinnen und Schüler verschiedene Möglichkeiten, die bedingte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen.

Die Lernenden können mit Zufallsvariablen umgehen und die Binomialverteilung anwenden. Sie können den Erwartungswert berechnen und wissen, wann ein Spiel fair ist. Ebenso sind den Jugendlichen σ-Intervalle und das Verfahren zum Testen von Hypothesen bekannt.

Aus dem Bereich Analysis können die Lernenden die Extrempunkte (graphisch) bestimmen und mithilfe eines Gleichungssystems den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion herleiten.

Idealerweise sind ausreichende Kenntnisse eines Tabellenkalkulationsprogramms, z. B. *Excel*, vorhanden. Das Bestimmen der Funktionsterme mithilfe einer Trendfunktion kann im Unterricht gezeigt werden. Dies gilt ebenso für die Nutzung der Summenformeln.

Lehrplanbezug

In den Kernlernplänen NRW
(https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GOSt_Mathematik.pdf)
sind im Inhaltsfeld „Stochastik" unter anderem folgende Kompetenzerwartungen aufgeführt:

Die Schülerinnen und Schüler …

- deuten Alltagssituationen als Zufallsexperimente,
- simulieren Zufallsexperimente,
- verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen,
- modellieren Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen,
- bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten,

- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln,
- bestimmen den Erwartungswert und die Standardabweichung von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen,
- verwenden Bernoulli-Ketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente,
- nutzen die σ-Regeln für prognostische Aussagen,
- interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse,
- beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art, stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch.

Aus dem Inhaltsfeld „Analysis“ werden unter anderem folgende Kompetenzerwartung aufgeführt:

- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“).

Ziel ist es zudem, das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler bei der Bestimmung der Anzahlen der Kugeln mit 0 (1, 2, 3) Punkten zu verstärken.

Hinweise zu den Materialien

Falls möglich, bietet es sich an, eine Kugelpyramide zu bauen und die Kugeln zu mit Punkten zu versehen. Diese Kugelpyramide dient im Anschluss bei der Bearbeitung der Aufgaben als Anschauungsmaterial.

Bei der Berechnung der bedingen Wahrscheinlichkeiten bei Aufgabe **1a)** gibt es verschiedene Möglichkeiten. Kennen die Schülerinnen und Schüler diese, so kann die Aufgabe gruppenweise auf unterschiedliche Arten gelöst werden. Andernfalls bietet sich die Möglichkeit, die anderen Lösungsmöglichkeiten einzuüben. Bei Aufgabe **2)** sollte vor der weiteren Bearbeitung der Aufgaben die Anzahl der Punkte im Beutel B_0 bzw. B_M verglichen werden. Die Teilaufgaben von Aufgabe 2) können mithilfe eines Baumdiagramms bzw. mit einer Tabellenkalkulation bearbeitet werden. Kennen die Schülerinnen und Schüler beide Lösungswege, so können die Aufgaben gruppenweise auf die unterschiedlichen Arten gelöst und anschließend der Rechenaufwand bei der Lösung verglichen werden. Zur Differenzierung nach Schnelligkeit, kann Aufgabenteil 2b) so variiert werden, dass die Kugel mit zwei Punkten aus Beutel B_0 gezogen wurde. Vor der

Bearbeitung von Aufgabenteil **2c)** wird die Definition von „stochastisch abhängig/unabhängig" wiederholt bzw. eingeführt.

Vor der Bearbeitung von Aufgabe **3)** wird der Begriff „faires Spiel" wiederholt. Bei Aufgabe **4)** werden bei schwächeren Lerngruppen die Gesetzmäßigkeiten für die Anzahl der Kugeln mit 0 (1, 2, 3) Punkten im Unterricht besprochen. Evtl. findet auch eine Berechnung in einer Tabellenkalkulation statt. Die Aufgaben von Aufgabe **4)** können auf drei verschiedene Arten bearbeitet werden. Kennen die Lernenden die Lösungswege, so können die Aufgaben gruppenweise auf die unterschiedlichen Arten gelöst und anschließend der Rechenaufwand bei der Lösung verglichen werden. Die Berechnung mithilfe der Summenformel sollte, insbesondere wenn sie per Hand erfolgt, von leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden. Aufgabe 4) kann aufgeteilt auf zwei Gruppen bearbeitet werden. Die zweite Gruppe bearbeitet dann den Aufgabenteil 4f). Bei der Bestimmung des Maximums weisen Sie darauf hin, dass der Definitionsbereich beachtet werden muss.

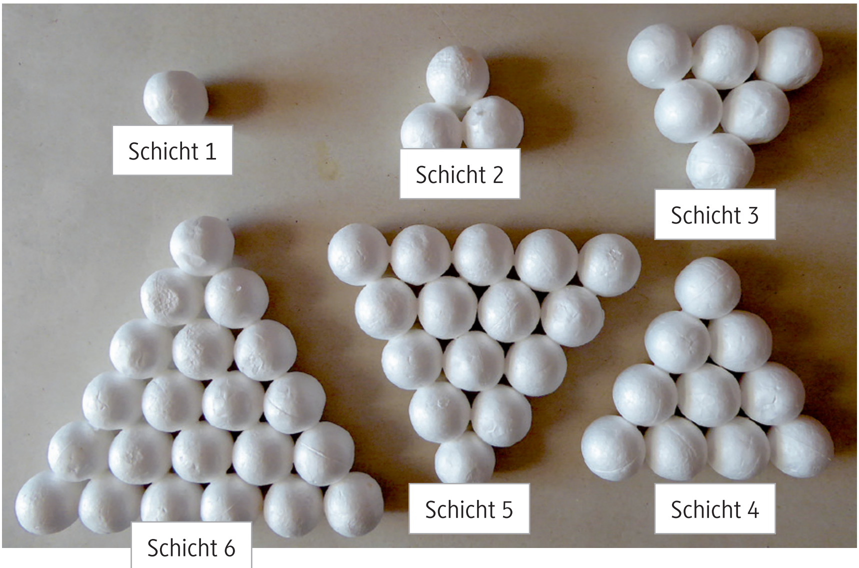
Bei Aufgabe **5)** werden evtl. die σ-Regeln und das Verfahren des Testens von Hypothesen wiederholt.

Differenzierung

Aufgabe	1	2	3	4	5
Niveau					

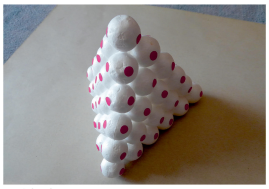
M1 Beschreibung der Kugelpyramide

Sechs Kugeln werden so geradlinig nebeneinandergelegt, dass sich je zwei Kugeln berühren. An diese sechs Kugeln werden weitere 5 (4, 3, 2, 1) Kugel(n) gelegt, sodass die neu angelegten Kugeln jeweils zwei der vorhandenen Kugeln berühren und letztendlich eine „Kugelschicht" entsteht, bei der die Mittelpunkte der äußeren Kugeln ein gleichseitiges Dreieck bilden. Das gleiche Verfahren wird mit 5 (4,3,2) Ausgangskugeln durchgeführt (siehe Abbildung).



Stapelt man die Kugelschichten aufeinander und legt auf die obere Kugelschicht noch eine weitere Kugel, so entsteht eine senkrechte Kugelpyramide. Jede Kugel der sichtbaren Seitenflächen, also die Mantelfläche der Pyramide, nicht aber die Grundfläche, wird jetzt von jeder Seite mit einem Punkt versehen. (siehe nebenstehende Abbildung).

Bilder: Günther Weber



Wahrscheinlichkeiten bei einer Kugelpyramide – Anwendungsaufgaben zur Stochastik

Ein Beitrag von Günther Weber

Foto: Günther Weber

Pyramiden sind Schülerinnen und Schülern als geometrische Körper bzw. aus dem alltäglichen Leben bekannt. Setzt man eine Pyramide aus Kugeln zusammen und versieht die einzelnen Kugeln auf der Oberfläche (Mantelfläche) der Pyramide jeweils mit einem Punkt, so bieten die bepunkteten Kugeln die Grundlage für unterschiedliche Zufallsexperimente.
Zur Lösung der Aufgaben setzen die Jugendlichen (vereinfachte) Baumdiagramme, bedingte Wahrscheinlichkeiten, die Binomialverteilung oder Sigma-Intervalle ein. Zudem überprüfen sie, ob zwei Ereignisse stochastisch abhängig oder unabhängig sind; sie testen Hypothesen und berechnen den Fehler 2. Art beim Hypothesentest.

RAABE