

# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Erwartungswert und Standardabweichung*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)



### Erwartungswert und Standardabweichung – Glücksspiele und Versicherungen

Ein Beitrag von Dr. Jürgen Franke



© Yellow Dog Productions/The Image Bank

Kann man beim Rouletteplatz sicher gewinnen? Wie hochelchen Versicherungen habe Schadenssummen? Im vorliegenden Beitrag gehen die Jugendlichen dieses und vielen weiteren spannenden Fragen auf den Grund und beantworten sie durch anwendungsbezogenen Umgang mit Erwartungswerten, Varianzen und Standardabweichungen. Dabei stärken die Schülerinnen und Schüler durch motivierende Elemente ihre Kompetenzen im stochastischen Modellieren sowie im realitätsnahen Argumentieren und entwickeln außerdem ihre digitalen Fähigkeiten.

RAABE  
LEARNING

# Erwartungswert und Standardabweichung – Glücksspiele und Versicherungen

Ein Beitrag von Dr. Jürgen Franke



© Yellow Dog Productions/The Image Bank

Kann man beim Roulettespiel sicher gewinnen? Wie begleichen Versicherungen hohe Schadensummen? Im vorliegenden Beitrag gehen die Jugendlichen diesen und vielen weiteren spannenden Fragen auf den Grund und beantworten sie durch anwendungsbezogenen Umgang mit Erwartungswerten, Varianzen und Standardabweichungen. Dabei stärken die Schülerinnen und Schüler durch motivierende Elemente ihre Kompetenzen im stochastischen Modellieren sowie im realitätsnahen Argumentieren und entwickeln außerdem ihre digitalen Fähigkeiten.

# Erwartungswert und Standardabweichung – Glücksspiele und Versicherungen

## Oberstufe (grundlegend)

von Dr. Jürgen Franke

<b>Hinweise</b>	<b>1</b>
<b>M1 Erwartungswert und Standardabweichung</b>	<b>3</b>
<b>M2 Anwendungsaufgaben</b>	<b>11</b>
<b>M3 Tippkarte</b>	<b>13</b>
<b>M4 Versicherung</b>	<b>14</b>
<b>M5 Lotto</b>	<b>17</b>
<b>M6 Roulettespiel</b>	<b>20</b>
<b>M7 Martingalespiel</b>	<b>24</b>
<b>Lösungen</b>	<b>27</b>

## Die Schülerinnen und Schüler lernen:

Erwartungswerte, Varianzen und Standardabweichungen von Datensätzen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu berechnen. Sie begreifen, dass Verteilungen mit gleichem Erwartungswert trotzdem sehr unterschiedlich gestreut sein können. Der Beitrag hat einen starken Alltags- und Praxisbezug, beinhaltet z. B. Aufgaben zu Glücksspielen und Versicherungen, sodass die Jugendlichen die Relevanz der Stochastik im täglichen Leben erkennen.

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt FS Formelsammlung TK Tippkarten

Thema	Material	Methode
Erwartungswert und Standardabweichung	M1	AB, FS
Anwendungsaufgaben	M2	AB
Tippkarte	M3	TK
Versicherung	M4	AB
Lotto	M5	AB, FS
Roulettespiel	M6	AB
Martingalespiel	M7	AB

## Kompetenzprofil:





**Inhalt:** Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Ereigniswahrscheinlichkeiten, Baumdiagramm, Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung

**Medien:** Tabellenkalkulationsprogramm

**Kompetenzen:** Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

© RAABE 2022

## Erklärung zu den Symbolen

 einfaches Niveau	 mittleres Niveau	 schwieriges Niveau
 Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.		

## Hinweise

### Lernvoraussetzungen

Die Lernenden kennen die Begriffe Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung und können Ereigniswahrscheinlichkeiten u. a. mithilfe von Baumdiagrammen bestimmen. Bestenfalls können sie mit der Summenschreibweise und einem Tabellenkalkulationsprogramm umgehen.

### Lehrplanbezug

Im Kernlernplan NRW

[https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP\\_GOSt\\_Mathematik.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf)

finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln,
- modellieren Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen,
- untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben,
- bestimmen den Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  von Zufallsgrößen.

Die Schülerinnen und Schüler verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum

- Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

## Methodisch-didaktische Anmerkungen

Die Materialien sind auch zum Selbststudium geeignet, da sie die Sachverhalte Schritt für Schritt erklären und ausführlich erläutern. Die Aufgaben eignen sich zur Besprechung im Unterricht sowie auch als Hausaufgabe.

Aufgabe 3 „Busabfahrten“ von **M2** sollten die Lernenden nach Möglichkeit mit einem Tabellenkalkulationsprogramm lösen, damit sie auch ihre digitalen Kompetenzen stärken.

**M4** („Versicherung“) und **M7** („Martingalespiel“) sind ideale Referatsthemen. Leistungsstarke Jugendliche können sich zu diesen Themen eigene Frage- und Aufgabenstellungen überlegen und lösen.

## Erwartungswert und Standardabweichung

M1

Bei Zufallsexperimenten können bestimmte Ergebnisse auftreten. Diese Ergebnisse haben in der Regel einen Wert, z. B. die Augenzahl eines Würfels. Diesen Wert kann eine sogenannte Zufallsgröße annehmen. Meistens wird sie mit „X“, „Y“ oder „Z“ bezeichnet. Da bei einem Zufallsexperiment verschiedene Ergebnisse auftreten können, die Zufallsgröße also mehrere Werte annehmen kann, werden diese nummeriert. Bei n möglichen Ergebnissen erhält man also die möglichen Werte der Zufallsgröße  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ . Diese Ergebnisse haben jeweils eine Wahrscheinlichkeit  $P(X = x_i)$ , mit der sie eintreten. Damit kann der Erwartungswert  $\mu(X)$ , kurz  $\mu$ , der Zufallsgröße X gebildet werden. Das ist ein mit den Wahrscheinlichkeiten gewichteter Mittelwert der einzelnen Werte, die die Zufallsgröße annehmen kann.

### Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mu(X) &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) \\ &= x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)\end{aligned}$$

X ist die Zufallsgröße eines Zufallsexperiments mit der Ergebnismenge

$$S = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}.$$

$x_i$  ist eines der n möglichen Ergebnisse.  $P(X = x_i)$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße den Wert  $X = x_i$  annimmt.

Die Zufallsgröße hat einen Erwartungswert. Es macht aber einen entscheidenden Unterschied, ob die einzelnen Werte, die die Zufallsgröße annehmen kann (und die auch mit einer größeren Wahrscheinlichkeit auftreten) sehr dicht beieinander liegen oder über einen weiten Bereich verstreut sind.



**Beispiel 1**

Eine Mathematiklassenarbeit brachte in einer Klasse von 20 Schülerinnen und Schülern folgende Ergebnisse.

i	1	2	3	4	5	6
Noten $x_i$	1	2	3	4	5	6
Anzahl $k_i$	3	2	4	5	5	1

i	1	2	3	4	5	6
Noten $x_i$	1	2	3	4	5	6
Rel. Häufigkeit $h_i$	3/20	2/20	4/20	5/20	5/20	1/20

Wir definieren eine Zufallsgröße

$$X := \text{„Mathenote der Klassenarbeit von 1–6“}$$

und definieren die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse:

$$P(X = x_i) := h_i = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^n k_i}$$

Anschließend berechnen wir den Erwartungswert der Zufallsgröße X mit der Formel

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i).$$

Es ergibt sich somit

$$\mu(X) = 1 \cdot \frac{3}{20} + 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{4}{20} + 4 \cdot \frac{5}{20} + 5 \cdot \frac{5}{20} + 6 \cdot \frac{1}{20} = 3,5.$$



# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Erwartungswert und Standardabweichung*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)



### Erwartungswert und Standardabweichung – Glücksspiele und Versicherungen

Ein Beitrag von Dr. Jürgen Franke



© Yellow Dog Productions/The Image Bank

Kann man beim Rouletteplatz sicher gewinnen? Wie hochelchen Versicherungen habe Schadenssummen? Im vorliegenden Beitrag gehen die Jugendlichen dieses und vielen weiteren spannenden Fragen auf den Grund und beantworten sie durch anwendungsbezogenen Umgang mit Erwartungswerten, Varianzen und Standardabweichungen. Dabei stärken die Schülerinnen und Schüler durch motivierende Elemente ihre Kompetenzen im statistischen Modellieren sowie im realitätsnahen Argumentieren und entwickeln außerdem ihre digitalen Fähigkeiten.

RAABE  
LEARNING