

# SCHOOL-SCOUT.DE



Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Berechnungen am "gedrehten" Pyramidenstumpf*

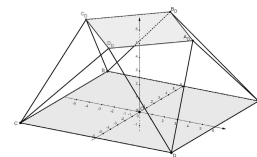
Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)



### Berechnungen am „gedrehten“ Pyramidenstumpf

Ein Beitrag von Günther Weber



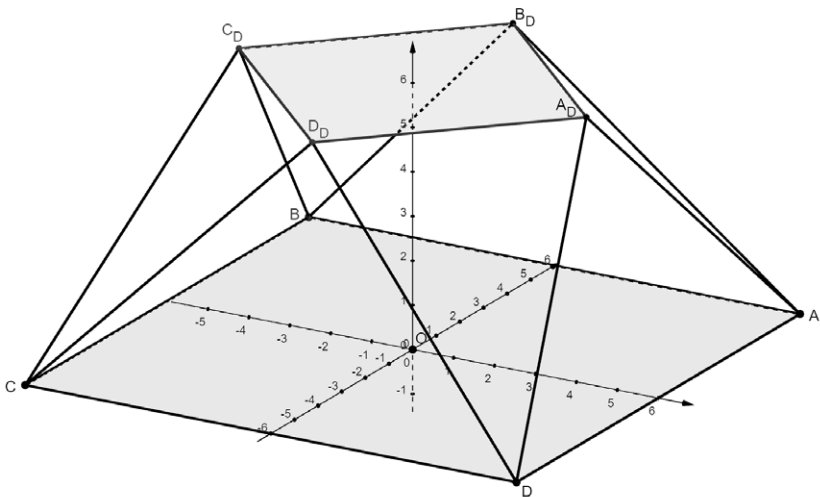
© Günther Weber

Bei einem „gedrehten“ Pyramidenstumpf (siehe Abbildung) bestimmen die Schülerinnen und Schüler die Eckpunkte der Deckfläche, untersuchen den Körper auf Symmetrie, beschreiben die Mantelfläche und berechnen den Winkel zwischen der Grund- bzw. Deckfläche und den Dreiecken der Mantelfläche. Der Körper wird durch eine Ebenenschar parallel zur Grundfläche geschnitten. Abhängig vom Schrägparameter bestimmen die Lernenden die Eckpunkte der Schnittfläche und untersuchen diese hinsichtlich Regelmäßigkeit und Größe. Ebenso berechnen sie das Volumen des „gedrehten“ Pyramidenstumpfes, indem sie einerseits den Körper in Teilkörper zerlegen und andererseits mit den Methoden der Analysis über die Schnittflächen integrieren. Zudem bestimmen die Lernenden den Parameter der Ebenenschar so, dass bestimmte Eigenschaften der Dreiecke der Mantelfläche erfüllt sind. Bei der Lösung der Aufgaben kann die Auswirkung unterschiedlicher Parameterwerte abergerechert veranschaulicht werden.

RAABE

# Berechnungen am „gedrehten“ Pyramidenstumpf

Ein Beitrag von Günther Weber



© Günther Weber

Bei einem „gedrehten“ Pyramidenstumpf (siehe Abbildung) bestimmen die Schülerinnen und Schüler die Eckpunkte der Deckfläche, untersuchen den Körper auf Symmetrie, beschreiben die Mantelfläche und berechnen den Winkel zwischen der Grund- bzw. Deckfläche und den Dreiecken der Mantelfläche. Der Körper wird durch eine Ebenenschar parallel zur Grundfläche geschnitten. Abhängig vom Scharparameter bestimmen die Lernenden die Eckpunkte der Schnittfläche und untersuchen diese hinsichtlich Regelmäßigkeit und Größe. Ebenso berechnen sie das Volumen des „gedrehten“ Pyramidenstumpfes, indem sie einerseits den Körper in Teilkörper zerlegen und andererseits mit den Methoden der Analysis über die Schnittflächen integrieren. Zudem bestimmen die Lernenden den Parameter der Ebenenschar so, dass bestimmte Eigenschaften der Dreiecke der Mantelfläche erfüllt sind. Bei der Lösung der Aufgaben kann die Auswirkung unterschiedlicher Parameterwerte altersgerecht veranschaulicht werden.

# Berechnungen am „gedrehten“ Pyramidenstumpf

## Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Ein Beitrag von Günther Weber

---

<b>Hinweise</b>	<b>1</b>
<b>Aufgaben</b>	<b>4</b>
<b>Lösungen</b>	<b>6</b>

---

### Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der Analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem sicher anzuwenden. Sie bestimmen die Koordinaten von Eckpunkten, berechnen die Innenwinkel und den Flächeninhalt von Dreiecken sowie den Winkel zwischen zwei Ebenen. Die Lernenden beschreiben die Schnittfläche eines „gedrehten“ Pyramidenstumpfs und berechnen den Flächeninhalt der Schnittfläche. Sie ermitteln das Volumen des Körpers, indem sie diesen in Pyramiden zerlegen bzw. indem sie mit den Methoden der Analysis über die Schnittflächen integrieren. Ebenso untersuchen die Jugendlichen, ob die Dreiecke der Mantelfläche abhängig vom Parameter einer Ebenenschar gewisse Eigenschaften aufweisen.

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

**AB** Arbeitsblatt



einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M1	AB

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Abbildungen in der Ebene, Koordinaten im Raum, Symmetrie zu Koordinatenebenen, Geraden- und Ebenengleichungen, Winkel zwischen Ebenen, Flächeninhalt und Innenwinkel im Dreieck, Schnitt Ebenenschar mit Körper, lineares Gleichungssystem, Volumen Pyramide, Integration über Schnittflächen, rechtwinkliges bzw. gleichseitiges Dreieck

**Medien:** GTR/CAS, GeoGebra

**Kompetenzen:** Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), Kommunizieren (K6)

## Hinweise

### Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkteform bzw. Punkt-Richtungsform der Geradengleichung sowie die (Hessesche-) Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebenenschar bereitet ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen können mit den Methoden der Analytischen Geometrie Abstandsberechnungen und Winkelberechnungen (auch mit Parameter) durchführen sowie Flächeninhalte von Dreiecken und das Volumen von Pyramiden bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage ein lineares Gleichungssystem aufzustellen und zu lösen. Außerdem integrieren sie über Schnittflächen.

### Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen

[https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP\\_GoSt\\_Mathematik.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GoSt_Mathematik.pdf)

(aufgerufen am 11.07.2022) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar
- bestimmen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebene.

Die Inhaltsfelder Analysis, Analytische Geometrie sollen laut Kernlehrplan zudem nicht isoliert nebeneinander, sondern konzeptionell vernetzt z. B. durch übergreifende Konzepte wie den funktionalen Zusammenhang betrachtet werden. So spricht der Beitrag auch folgende Kompetenzen aus dem Bereich der Analysis an.

Die Schülerinnen und Schüler

- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“)
- bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern mithilfe von bestimmten Integralen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um den Einfluss der Parameter auf Punkte, Geraden, Winkel, Flächeninhalte und Ebenen zu erkunden. Ebenso bieten digitale Werkzeuge die Möglichkeit der experimentellen Lösung bestimmter Aufgabenstellungen.

### **Methodisch-didaktische Anmerkungen:**

Die Abbildungen bei Aufgabe 1) können mithilfe eines Geometrieprogramms in einem ebenen Koordinatensystem veranschaulicht werden. Bei leistungsschwächeren Lerngruppen kann zudem geklärt werden, welche Auswirkungen eine Verschiebung parallel zur  $xy$ -Ebene auf die Koordinaten eines Punktes hat. Bei Aufgabe 2b) gibt es die Möglichkeiten, die Koordinaten der Eckpunkte als Schnitt von Ebene und Kanten des Körpers zu bestimmen oder die Symmetrie des Körpers zu nutzen. Beide Möglichkeiten können vor der Bearbeitung besprochen werden. Bei der Bestimmung der Koordinaten der Punkte als Schnitt von Ebene und Kanten kann dies aufgeteilt in mehrere Gruppen geschehen. Im Anschluss besprechen Sie, wie sich die Symmetrie auf die Vorzeichen der Koordinaten auswirkt.

Bei den Aufgaben 2), 3) und 4) ermitteln die Lernenden bei einigen Aufgaben den Flächeninhalt von Dreiecken. Vor der Berechnung wiederholen Sie verschiedene Methoden der Berechnung. Z. B.: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich

- dem halben Produkt aus Grundseite und Höhe (im gleichseitigen Dreieck ist es günstig, als Grundseite die Basis und als Höhe den Abstand zwischen dem Mittelpunkt der Basis und dem Eckpunkt des Dreiecks, der der Basis gegenüberliegt, wählt),
- dem halben Produkt zweier Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels,
- dem halben Betrag des Vektorprodukts der Vektoren, die das Dreieck aufspannen.

Die Flächeninhalte können dann gruppenweise auf verschiedene Arten berechnet und im Anschluss verglichen werden.

Bei Aufgabe 3a) veranschaulichen Sie die Teilpyramiden vor der Berechnung des Volumens z. B. mit GeoGebra. Die Ermittlung des Volumens der Teilpyramiden kann dann ebenfalls gruppenweise geschehen. An dieser Stelle weisen Sie Ihre Klasse darauf hin, dass sie die Höhe der Pyramide mithilfe des Lotfußpunkt-Verfahrens oder, sofern bekannt, mithilfe der Hesseschen Normalenform bestimmen können. Ist die Berechnung des Volumens einer Pyramide mithilfe des Spatprodukts nicht bekannt, so stellen Sie den Schülern und Schülerinnen diese „elegante“ Möglichkeit vor.

Die Integration über Schnittflächen bei Aufgabe 3a) veranschaulichen Sie vor der Bearbeitung der Aufgabe noch einmal z. B. in GeoGebra, indem die Lernenden für verschiedene Scharparameter die Achtecke betrachten.

# SCHOOL-SCOUT.DE



Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Berechnungen am "gedrehten" Pyramidenstumpf*

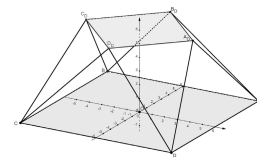
Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)



### Berechnungen am „gedrehten“ Pyramidenstumpf

Ein Beitrag von Günther Weber



© Günther Weber

Bei einem „gedrehten“ Pyramidenstumpf (siehe Abbildung) bestimmen die Schülerinnen und Schüler die Eckpunkte der Deckfläche, untersuchen den Körper auf Symmetrie, beschreiben die Mantelfläche und berechnen den Winkel zwischen der Grund- bzw. Deckfläche und den Dreiecken der Mantelfläche. Der Körper wird durch eine Ebenenschar parallel zur Grundfläche geschnitten. Abhängig vom Schrägparameter bestimmen die Lernenden die Eckpunkte der Schnittfläche und untersuchen diese hinsichtlich Regelmäßigkeit und Größe. Ebenso berechnen sie das Volumen des „gedrehten“ Pyramidenstumpfes, indem sie einerseits den Körper in Teilkörper zerlegen und andererseits mit den Methoden der Analysis über die Schnittflächen integrieren. Zudem bestimmen die Lernenden den Parameter der Ebenenschar so, dass bestimmte Eigenschaften der Dreiecke der Mantelfläche erfüllt sind. Bei der Lösung der Aufgaben kann die Auswirkung unterschiedlicher Parameterwerte abergerechert veranschaulicht werden.

RAABE