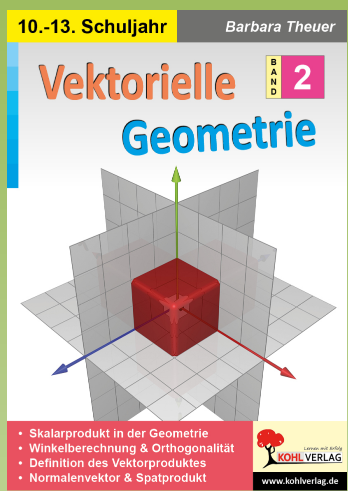
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Vektorielle Geometrie / Band 2

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Inhalt

Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746
KOHL VERLAG

Vorwort

Während im ersten Band der Reihe „Vektorielle Geometrie“ Aufgabenmaterial zu den Grundlagen der Vektorrechnung – wie beispielsweise Definitionen des Vektors als gerichtete Größe, Komponentenschreibweise von Vektoren, Darstellung von Punkten, Vektoren und geometrischen Objekten im räumlichen Koordinatensystem, zeichnerische und rechnerische Addition und Subtraktion von Vektoren, ihre Vervielfachung sowie Untersuchungen zur Gültigkeit von vektoriellem Kommunikativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz – angeboten wird, konzentriert sich der zweite Band ausschließlich auf die vektoriellen Operationen *Skalarprodukt* und *Vektorprodukt*.

Entsprechend der Bedeutung des Skalarproduktes für Berechnungen in Physik und Technik wird in vorliegendem Heft für die Einführung dieser Operation die Berechnung der mechanischen Arbeit als anschauliches, fachübergreifendes Beispiel gewählt. Dass bei dieser Berechnung – folgend aus den Gesetzen der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck – der Kosinus des Winkels zwischen Kraftvektor und seiner Komponente in Wegrichtung einfließt, wird den Schülern verständlich gemacht und ebenso, dass die Verknüpfung der Vektoren von Kraft und Weg die richtungslose Größe Arbeit als *Skalarprodukt* der vektoriellen Größen Kraft und Weg definiert.

Die verallgemeinerte Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren als Produkt ihrer Beträge und dem Kosinus ihres eingeschlossenen Winkels und die Verbindung mit der Koordinatenform des Skalarproduktes ermöglichen es, den von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkel sowie Winkel geometrischer Figuren zu berechnen, was einen Schwerpunkt in diesem Abschnitt darstellt. Dabei kommt der Orthogonalität von Vektoren, welche sich mit Hilfe des Skalarproduktes einfach nachweisen lässt, besondere Bedeutung zu. Berechnungen am Dreieck und einfache geometrische Beweise runden das Thema ab.

Im zweiten Abschnitt des Heftes wird das *Vektorprodukt* (auch *Kreuzprodukt*) als weitere Form der multiplikativen Verknüpfung von Vektoren behandelt. Die Motivation für die Einführung dieser Operation wird aus der Notwendigkeit entwickelt, zu einer von zwei Vektoren aufgespannten Ebene einen *Normalenvektor*, welcher folglich orthogonal zu beiden Spannvektoren sein muss, zu erzeugen. Mit der Lösung des Gleichungssystems, welches aus dem Anwenden der Orthogonalitätsbedingung auf beide Spannvektoren resultiert, ergibt sich die Lösungsmatrix zur Berechnung des Vektorproduktes.

Auch die vereinfachte Rechenvorschrift der kreuzweisen Multiplikation entsprechender Komponenten wird vorgestellt. Neben zahlreichen Übungen zur Berechnung des Vektorproduktes und Untersuchungen zur Gültigkeit der bekannten Rechengesetze liegt ein Schwerpunkt auf der Anwendung zur Berechnung von Parallelogramm- und Dreiecksflächen sowie des Volumens eines Spats mittels *Spatprodukt*.

Die abschließend angebotene komplexe Aufgabe mit Prüfungsniveau und ein Multiple-Choice-Test können zur Leistungsbewertung oder Selbstkontrolle der Schüler eingesetzt werden. In dem Anliegen, sowohl zur Verbesserung der Fertigkeiten der Schüler beim Berechnen von Skalar- und Vektorprodukt als auch zum Verständnis der Zusammenhänge beizutragen, mit dem weiteren Ziel, eine gute Grundlage für die Behandlung von Geraden im Raum, Ebenen und deren Lagebeziehung – Inhalt des Folgebands „Vektorielle Geometrie, Band 3“ – zu schaffen, wünschen beim Einsatz des Materials viel Erfolg:

Das Team des Kohl-Verlags und

Barbara Theuer

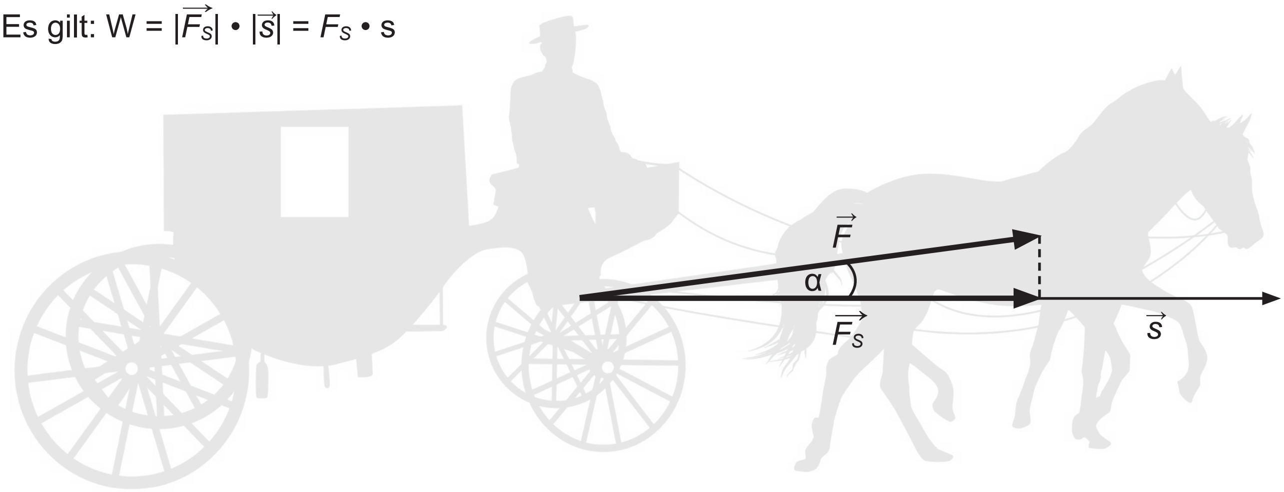
1 Das Skalarprodukt

1.1 Einführung und Definition des Skalarproduktes (Blatt 1)

Ein Beispiel aus der Physik

Eine Pferdekutsche wird gleichmäßig über einen Waldweg gezogen. Die von den Pferden aufgebrachte Zugkraft wird in Richtung der Deichsel aufgebracht. Diese wird durch den Kraftvektor $\vec{F}$ dargestellt. Um die mechanische Arbeit *W* zu berechnen, welche bei der Bewegung der Kutsche um den Weg *s* – veranschaulicht durch den Vektor $\vec{s}$ – verrichtet wird, ist die Kraftkomponente $\vec{F_S}$ in Wegrichtung entscheidend.

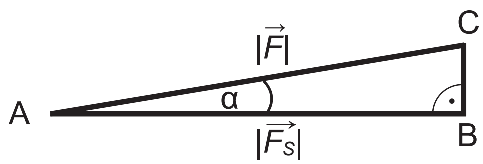
Es gilt: $W = |\vec{F_S}| \cdot |\vec{s}| = F_S \cdot s$



Den Betrag der Kraftkomponente $\vec{F_S}$ kann man mit Hilfe des Kosinus ausdrücken. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $|\vec{F_S}| = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$

Somit folgt für die mechanische Arbeit:

$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$

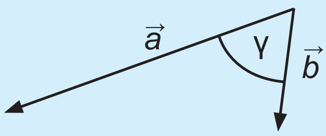


Dieses Produkt ist kein Vektor, sondern eine skalare Größe (= reelle Zahl). Es wird als ***Skalarprodukt*** $\vec{F} \bullet \vec{s}$ **der Vektoren** $\vec{F}$ **und** $\vec{s}$ bezeichnet.

Geometrische Definition

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen den Winkel γ ein.

Die Operation $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ wird als **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert.



Beispiel:

Zwei Pferde ziehen mit einer Gesamtkraft von 1600 N in Richtung der Deichsel (α = 30° Neigung gegen die Horizontale) eine Kutsche um 100 m entlang eines horizontalen Waldweges. Welche mechanische Arbeit wird dabei verrichtet?

Lösung:

$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$

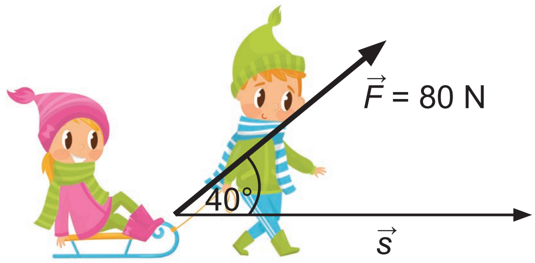
$W = 1600\ N \cdot 100\ m \cdot \cos 30°$

$W \approx 138.564\ Nm \approx 138{,}6\ kJ$

1 Das Skalarprodukt

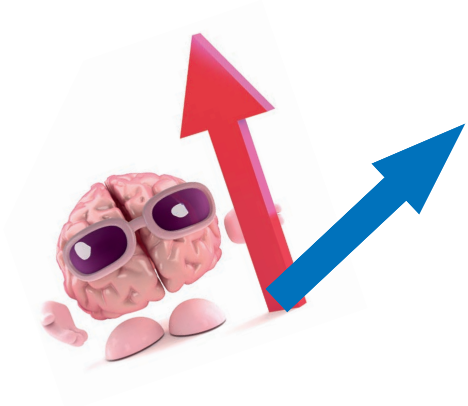
1.1 Einführung und Definition des Skalarproduktes (Blatt 2)

Aufgabe 1: *Berechne die mechanische Arbeit, die zum Ziehen eines besetzten Schlittens entlang einer horizontalen Strecke von 300 m Länge verrichtet werden muss. Entnimm die nötigen Angaben der Skizze.*



Aufgabe 2: *Gegeben sind die Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren a und b schließen einen Winkel von 60° ein.
Berechne das Skalarprodukt $\vec{a} \bullet \vec{b}$ *nach der geometrischen Definition (Blatt 1).*



Aufgabe 3: **a)** *Zeichne auf genormtes Kästchenpapier (Kästchenbreite 0,5 cm) die Vektoren* $\vec{a} = \binom{12}{5}$ *und* $\vec{b} = \binom{8}{-6}$ *mit einem gemeinsamen Anfangspunkt. Ermittle die Länge der Vektoren und die Größe des von* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *eingeschlossenen Winkels γ aus der Zeichnung.*

b) *Berechne das Skalarprodukt* $\vec{a} \bullet \vec{b}$ *nach der geometrischen Definition.*

KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg
Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746

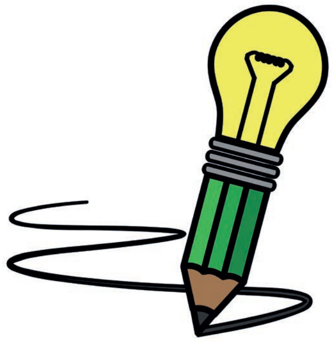
Das Skalarprodukt

1.2 Die Koordinatenform des Skalarproduktes (Blatt 1)

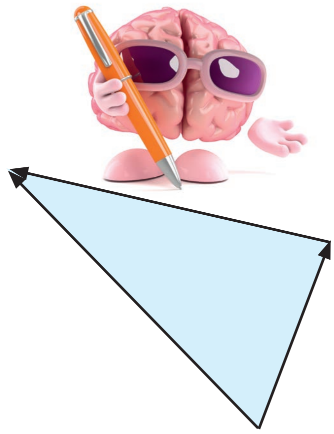
Es ist mühsam, das Skalarprodukt zweier Vektoren zu ermitteln, wenn der von den Vektoren eingeschlossene Winkel nicht bekannt ist. Außerdem kann der Winkel zeichnerisch nur ungefähr bestimmt werden.

Vorüberlegungen zur Herleitung einer winkel- und vektorfreien Form

Aufgabe 1: *Es gibt einen Hilfsvektor $\vec{c}$, welcher den Zusammenhang zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ angibt. Fertige eine entsprechende Skizze an.*



Aufgabe 2: *Welcher mathematische Satz gibt die Beziehung zwischen den Beträgen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel γ an? Schreibe die entsprechende Gleichung unter Verwendung der Symbole $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$ und γ auf.*

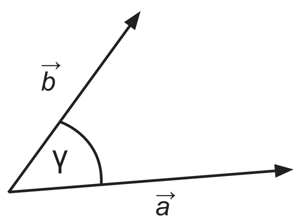


Aufgabe 3: *Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.*

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen einen Winkel $\gamma = 60°$ ein.

a) *Ergänze den Vektor $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ in der Skizze.*

b) *Berechne den Betrag $|\vec{c}|$ des Vektors $\vec{c}$.*



KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg
Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746

1 Das Skalarprodukt

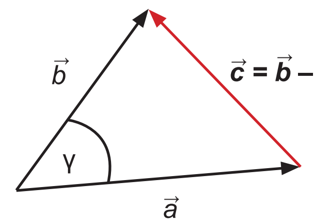
1.2 Die Koordinatenform des Skalarproduktes (Blatt 2)

Herleitung einer winkel- und vektorfreien Form

In dem von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beschriebenen Dreieck gilt für die Beträge dieser Vektoren der Kosinussatz:

1. $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$

Geometrische Definition des Skalarproduktes!



2. $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b}$

3. $2 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2$ (Umformung)

4. $2 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2$

Unter Anwendung bekannten Wissens über die Komponentenform und den Betrag eines Vektors folgt:

5. $2 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$
$- ((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2)$

5. + nur ein Schritt → 6.?

6. $2 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b} = 2 \cdot (b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2 + b_3 \cdot a_3 \quad | : 2$

7. $\vec{a} \bullet \vec{b} = b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2 + b_3 \cdot a_3$

Komponentenform

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

Betrag

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

<u>**Aufgabe 4**</u>: *Zeige ausführlich alle Umformungen, welche von Gleichung **5.** zu Gleichung **6.** führen! Setze dabei die 2. binomische Formel ein.*

Koordinatenform des Skalarproduktes

In der Ebene: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$

Im Raum: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$

Beispiel: Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, gesucht: Skalarprodukt

Lösung: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = \mathbf{22}$

Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746
KOHL VERLAG

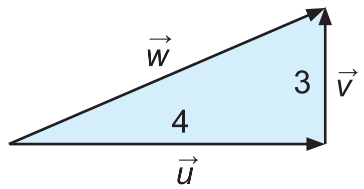
1 Das Skalarprodukt

1.3 Übungen zum Rechnen mit dem Skalarprodukt

Aufgabe 1: *Berechne das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.*

a) $\vec{a} = \binom{3}{2}$, $\vec{b} = \binom{1}{5}$	**b)** $\vec{a} = \binom{3}{2}$, $\vec{b} = \binom{-1}{5}$
c) $\vec{a} = \binom{4}{3}$, $\vec{b} = \binom{3}{-4}$	**d)** $\vec{a} = \binom{0}{5}$, $\vec{b} = \binom{3}{0}$
e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	**f)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
g) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	**h)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} k \\ 3k \\ 2k \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: *Berechne die Skalarprodukte $\vec{u} \bullet \vec{v}$ und $\vec{v} \bullet \vec{w}$.*
Entnimm die Angaben aus der Abbildung rechts.



Aufgabe 3: *Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$.*
Für welche Werte von k nimmt das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

a) *den Wert 2 an?* **b)** *den Wert 0 an?*

a)

b)

Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746
KOHL VERLAG

Vektorielle Geometrie

Band 2: Skalarprodukt und Vektorprodukt

1. Digitalauflage 2022

Inhalt: Barbara Theuer
Cover: © fotoflash - AdobeStock.com
Redaktion: Kohl-Verlag
Grafik & Satz: Kohl-Verlag

Bestell-Nr. P12 746

ISBN: 978-3-98558-593-9

Bildquellen ©AdobeStock.com:

S. 3: Daniel Fuhr; **S. 5:** Balint Radu, imaagio.design; **S. 6:** Happypictures, Steve Young; **S. 7:** alekseymartynov, zhaluldesign, Steve Young; **S. 8:** Steve Young, nyamol; **S. 9:** Roman Milert; **S. 10:** jokatoons, Yael Weiss; **S. 11:** nyamol, Steve Young, Grommik; **S. 12:** Steve Young, illu24; **S. 13:** Vector Tradition; **S. 14:** Steve Young, Dim Tik; adrian_ilie825; **S. 15:** alvincadiz, Steve Young; **S. 16:** Dim Tik; **S. 17:** siridhata, 3dkombinat, gchingowin; **S. 18:** Steve Young (2x); **S. 19:** Steve Young (2x), Grommik; **S. 20:** Daniel Fuhr, Cienpies Design, M. Schuppich; **S. 21:** nyamol, Yael Weiss; **S. 22:** Steve Young, philhol, jokatoons; **S. 23:** Dim Tik, Steve Young; **S. 24:** Steve Young, HuHu Lin, SimpLine; **S. 25:** lineartestpilot, hermandesign2015, Shvetsova Yulia; **S. 26:** graphicheat, Steve Young; **S. 27:** Christos Georghiou, Daniel Fuhr, Stasique; **S. 28:** Dim Tik, ylivdesign, ogieurvil; **S. 29:** Christos Georghiou, lineartestpilot; **S. 30:** nyamol, icreative3d, Dim Tik; **S. 31:** Mego-studio, Steve Young; **S. 32:** Steve Young; **S. 33:** alka5051, Daniel Fuhr, Christos Georghiou, HitToon.com; **S. 35/36:** Jemastock; **S. 37:** icreative3d, grgroup, 3dkombinat; **S. 38:** Dim Tik, Steve Young; **S. 39:** Steve Young, Dim Tik, alka5051.

Bildquellen © wikipedia.com:

S. 17: Triangle-thales-circle, © Martin Thoma; **S. 21:** RHR, © Ladyt; **S. 22:** Lorentzkraft v2, © Ladyt, UVW-regel-strom, © MikeRun; **S. 29:** MParallelepiped-0, © Ag2gaeh (ergänzt), Parallelepiped-v, © Ag2gaeh (ergänzt), Parallelepiped2, © Niabot; **S. 30:** Parallelepiped-v, © Ag2gaeh (ergänzt); **S. 32:** Blue tetrahedron, © Ssawka; **S. 33:** Mediane Dbenetti (ergänzt), Tetraeder mit Färbungen, © Petrus3743; **S. 35/36:** Triangular Pyramid (Tetrahedron), © DEMcAdams (ergänzt); **S. 36:** Sterntetraeder im Würfel, © Nomen2Omen; **S. 53:** Parallelepiped-v, © Ag2gaeh (ergänzt); **S. 56:** Mediane Dbenetti (ergänzt); **S. 58/59:** Triangular Pyramid (Tetrahedron), © DEMcAdams (ergänzt).

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Vektorielle Geometrie / Band 2

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de