

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus: *Flugeraubnis erteilt!*

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Die gegenseitige Lage von Geraden im Raum

Reihe & S. 1	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
--------------	---------	----------	-----	---------	----------

Flugeraubnis erteilt! – Die gegenseitige Lage von Geraden im Raum
Dr. Rebecca Roy, Reutlingen



Das Flugeraubnis wird am 08.08.2008, 10:00 Uhr, 10:15 Uhr...

Klasse	12. Jahrgang / Klasse 101
Dauer	5 Stunden
Inhalt	Geraden im dreidimensionalen Raum, Stützvektor, Richtungsvektor, Stützpunkt, mögliche Lagen zweier Geraden im Raum
Der Plus	Übungsblätter zur gegenseitigen Lage zweier Geraden im Raum

Ready to take off? – Bevor die neue Flugroute genehmigt wird, muss sicher sein, dass sie von keinem anderen Flugzeug zu geringen Zeit geteilt wird.
Und hier kommen Ihre Schülerinnen und Schüler als Vertreter der Flugsicherungsbehörde ins Spiel: Sie betrachten in Gruppen die mögliche Lage zweier geradliniger Flugbahnen. Haben sie einen Scheitelpunkt? Sind sie identisch, parallel oder windschief?
Durch Berechnung und praktischer Überprüfung im dreidimensionalen Koordinatensystem kann entschieden werden, ob die Startlaubnis erteilt wird.

© Matthias Metzner & Springer 2008

Flugzeuglaubnis erteilt! – Die gegenseitige Lage von Geraden im Raum

Dr. Rebecca Roy, Reutlingen



Die Flugzeuglaubnis wird erst erteilt, wenn „die Luft rein ist“.

Foto: BilderBox.com

II/B

Klasse	12 (im G 8: Klasse 10)
Dauer	5 Stunden
Inhalt	Geraden im dreidimensionalen Raum, Stützvektor, Richtungsvektor, Spurpunkte, mögliche Lagen zweier Geraden im Raum
Ihr Plus	Gruppenarbeit zur gegenseitigen Lage zweier Geraden im Raum

Ready to take off? – Bevor die neue Flugroute genehmigt wird, muss sicher sein, dass sie von keinem anderen Flugzeug zur gleichen Zeit gekreuzt wird!

Und hier kommen Ihre Schülerinnen und Schüler als Vertreter der Flugsicherungsgesellschaft ins Spiel. Sie betrachten in Gruppen die mögliche Lage zweier geradliniger Flugbahnen: Haben sie einen Schnittpunkt? Sind sie identisch, parallel oder windschief?

Erst nach Berechnung und praktischer Überprüfung im dreidimensionalen Koordinatensystem kann entschieden werden, ob die Starterlaubnis erteilt wird.

Didaktisch-methodische Hinweise

Thematisch ist diese Unterrichtsreihe für die Sekundarstufe II vorgesehen. Sie gehört zur Leitidee „Raum und Form“ und hier zur „Analytischen Geometrie“.

Vorkenntnisse

Folgende Vorkenntnisse sollten die Schülerinnen und Schüler mitbringen, um sich anhand der vorliegenden Materialien die Geradengleichung und ihre Lagebeziehungen im dreidimensionalen Raum selbstständig erarbeiten zu können:

Vektorbegriff, Rechnen mit Vektoren (Addition, Subtraktion, S-Multiplikation), Ortsvektoren, Lineare Gleichungssysteme lösen, dreidimensionale Koordinatensysteme und Punkte, Vektoren zeichnerisch darstellen

Der Begriff der „Linearen (Un)Abhängigkeit“ wird nicht vorausgesetzt. Da es hier stets um den Vergleich zweier Vektoren geht, konnte er hier vermieden und durch „Vielfache voneinander“ ersetzt werden.

Die linearen Gleichungssysteme (LGS) sind so angelegt, dass sie „von Hand lösbar“ sind. Der Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners (GTR) ist natürlich auch möglich und durchaus angebracht. (Ergänzende Kommentare zum Einsatz des GTR weiter unten.)

Die Unterrichtseinheit ist wie folgt aufgebaut

Stunden	Inhalt	Material
1 bis 2	Erarbeitung der Geradengleichung, Übungen, Spurpunkte	M 1 bis M 4
3	Gruppenarbeit: Gegenseitige Lage von Geraden	M 5 bis M 9
4 bis 5	Präsentation, Zusammenfassung, Übungsphase	M 10 bis M 12

Erarbeitung der Geradengleichung

Die Inhalte der Materialien **M 1 bis M 4** können in Eigenregie durch die Schülerinnen und Schüler entweder in Einzel- oder in Partnerarbeit durchgeführt werden. Die Geradengleichung wird anhand eines konkreten Beispiels entwickelt. Den Transfer zu anderen Beispielen schaffen die Lernenden ohne Probleme.

Gruppenarbeit

Zur sich anschließenden Gruppenarbeit werden vier Gruppen benötigt, die je einen der Arbeitsaufträge **M 5 bis M 8** erhalten. Bei der Betrachtung der gegenseitigen Lage von zwei Geraden im Raum ergeben sich die folgenden Fälle: Die Geraden haben einen Schnittpunkt / sind identisch / sind parallel / sind windschief.

Material **M 9** muss für jede Gruppe mindestens einmal zur Verfügung stehen. Es handelt sich hierbei um einen Bastelbogen für ein dreidimensionales Koordinatensystem, in dem die Lernenden ihre Geraden darstellen sollen.

Ergebnissicherung und Übung

Nachdem die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse präsentiert haben, ist es als Kontrolle und Sicherung ratsam, mithilfe der Übersicht **M 10** nochmals die zentralen Inhalte mit Bezug auf die korrekte Schreibweise und der Einführung neuer Begriffe („windschief“) zur Verfügung zu stellen. Diese Übersicht soll den Schülerinnen und Schülern als Lern- oder Nachschlagblatt dienen. Anhand des Flussdiagramms von **M 11** überlegen die Lernenden nochmals, wann welcher Fall der gegenseitigen Lage zweier Geraden jeweils zutrifft. Mithilfe der Aufgaben aus **M 12** sollen sie ihre Kenntnisse anwenden und Routine im Umgang mit Geraden entwickeln.

Alternative Vorgehensweise: Einsatz eines GTR zum Lösen der Linearen Gleichungssysteme

Die linearen Gleichungssysteme können alternativ mit einem GTR gelöst werden. Im Folgenden finden Sie exemplarische Anmerkungen zum TI 83/84, die aber auch auf andere GTR übertragbar sind.

Durch Gleichsetzen der Geradengleichungen entsteht die Vektorgleichung $r \cdot \vec{u} - s \cdot \vec{v} = \vec{q} - \vec{p}$. Die zu dem entsprechenden (überbestimmten) LGS gehörige

3×3 -Matrix $\begin{pmatrix} u_1 & -v_1 & q_1 - p_1 \\ u_2 & -v_2 & q_2 - p_2 \\ u_3 & -v_3 & q_3 - p_3 \end{pmatrix}$ wird in den GTR eingegeben, der sie durch

Äquivalenzumformungen auf reduzierte Stufenform bringt (Befehl: rref).

Aus ihren Zeilen kann man nun die Lösungsmenge ablesen. Lautet eine Zeile beispielsweise $0 \ 1 \ 2$, so bedeutet dies $0r + 1s = 2$, also ist $s = 2$. Die Zeile $0 \ 0 \ 1$ hingegen steht für $0r + 0s = 1$, was zeigt, dass das LGS unlösbar ist.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren in den Spalten einer Matrix (der sogenannte Spaltenrang) gleich der Anzahl der linear unabhängigen Vektoren in den Zeilen der Matrix ist (Zeilenrang = Spaltenrang = Rang der Matrix). Dieser Rang der Matrix wird durch die Äquivalenzumformungen nicht verändert. Daher gilt:

Situation	Lineare (Un)Abhängigkeit der Vektoren	Stufenform
g und h schneiden sich	$\vec{q} - \vec{p}$ ist linear abhängig zu \vec{u} und \vec{v} . \vec{u} und \vec{v} sind linear unabhängig (Rang der Matrix ist also 2, da in den Spalten zwei linear unabhängige Vektoren stehen) und das LGS ist lösbar.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
g und h sind identisch	$\vec{q} - \vec{p}$, \vec{u} , \vec{v} sind Vielfache voneinander (Rang der Matrix = 1) und das LGS ist lösbar.	$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
g und h sind parallel	$\vec{q} - \vec{p}$ ist linear unabhängig zu \vec{u} bzw. \vec{v} . \vec{u} und \vec{v} sind linear abhängig (Rang der Matrix = 2) und das LGS ist unlösbar.	$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
g und h sind windschief	$\vec{q} - \vec{p}$, \vec{u} und \vec{v} sind linear unabhängig (Rang der Matrix = 3) und das LGS ist unlösbar.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Anmerkung: * steht für eine beliebige reelle Zahl

Reihe 4 S 4	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allgem. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schülerinnen und Schüler ...	Anforderungsbereich
K 4, K 1	L 3	... lernen die Geradengleichung im Raum kennen und üben Aufstellen und Umgang mit ihr selbstständig (M 1 und M 2),	I bis II
K 2	L 3	... können Spurpunkte berechnen und erkennen, dass sich damit Geraden geschickt räumlich darstellen lassen (M 4),	I
K 1, K 2, K 4	L 3	... nutzen ihre mathematischen Werkzeuge, um die gegenseitige Lage von Geraden zu analysieren (M 5 bis M 9),	I bis II
K 6	L 3	... präsentieren ihre Ergebnisse und fassen sie allgemein zusammen (M 10 und M 11),	II bis III
K 2, K 4, K 5	L 3	... lösen Probleme zur gegenseitigen Lage von Geraden (M 12).	I und III

Abkürzungen*Kompetenzen*

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

Leitideen

L 1 (Zahl und Zahlbereich), L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

Anforderungsbereiche

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

Reihe 4 S 5	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Auf einen Blick

Erarbeitung der Geradengleichung, Übungen, Spurpunkte

Material	Thema
M 1	Die Gerade im dreidimensionalen Raum Geradengleichung im dreidimensionalen Raum mithilfe von Stützvektor und Richtungsvektor erarbeiten
M 2 (und M 3)	Alles klar?!? – Testen und vertiefen Sie Ihr Verständnis Zeichnen von Punkten, Finden von Punkten auf Geraden, Angeben von Geradengleichungen zu Punkten
M 4 (und M 3)	Lernen Sie selbstständig: Spurpunkte einer Geraden Spurpunkte berechnen und zeichnen

II/B

Gruppenarbeit: Gegenseitige Lage von Geraden

Material	Thema
M 5 bis M 8	Ready to take off? – Sicherheit im Luftverkehr (Gruppen 1 bis 4) Gegenseitige Lage von zwei Geraden im Raum: Geraden haben einen Schnittpunkt / sind identisch / sind parallel / sind windschief
M 9	Visualisierung der Flugrouten Bastelvorlage für ein dreidimensionales Koordinatensystem

Präsentation, Zusammenfassung, Übungsphase

Material	Thema
M 10	Übersicht: Zwei Geraden im Raum – welche Möglichkeiten gibt es? Ergebnisse der Gruppenarbeit (M 5 bis M 9) als Merkblatt
M 11	Sind Sie auf dem richtigen Weg? Darstellung der Bedingungen für die vier Geradenbeziehungen in einem Flussdiagramm
M 12	Haben Sie die Flugrouten im Griff? Die neuen Inhalte überprüfen

Dauer

Planen Sie für die Materialien M 1 bis M 4 ein bis zwei Stunden ein. Für die Gruppenarbeit (M 5 bis M 9) benötigen die Schülerinnen und Schüler eine Stunde. Für die abschließende Phase der Ergebnissicherung und Übung sind zwei Stunden nötig.

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus: *Flugzeugerteilung*

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

