SCHOOL-SCOUT.DE

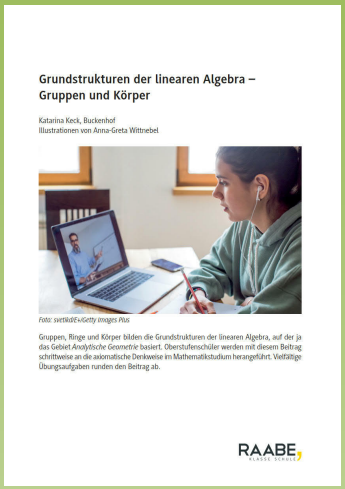
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Grundstrukturen der linearen Algebra

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Grundstrukturen der linearen Algebra – Gruppen und Körper

Katarina Keck, Buckenhof
Illustrationen von Anna-Greta Wittnebel

Foto: svetikd/E+/Getty Images Plus

Gruppen, Ringe und Körper bilden die Grundstrukturen der linearen Algebra, auf der ja das Gebiet *Analytische Geometrie* basiert. Oberstufenschüler werden mit diesem Beitrag schrittweise an die axiomatische Denkweise im Mathematikstudium herangeführt. Vielfältige Übungsaufgaben runden den Beitrag ab.

RAABE, KLASSE SCHULE

© Copyright school-scout.de / e-learning-academy AG – Urheberrechtshinweis
Alle Inhalte dieser Material-Vorschau sind urheberrechtlich geschützt. Das Urheberrecht liegt, soweit nicht ausdrücklich anders gekennzeichnet, bei school-scout.de / e-learning-academy AG. Wer diese Vorschauseiten unerlaubt kopiert oder verbreitet, macht sich gem. §§ 106 ff UrhG strafbar.

Grundstrukturen der linearen Algebra – Gruppen und Körper

Katarina Keck, Buckenhof
Illustrationen von Anna-Greta Wittnebel

Foto: svetikd/E+/Getty Images Plus

Gruppen, Ringe und Körper bilden die Grundstrukturen der linearen Algebra, auf der ja das Gebiet *Analytische Geometrie* basiert. Oberstufenschüler werden mit diesem Beitrag schrittweise an die axiomatische Denkweise im Mathematikstudium herangeführt. Vielfältige Übungsaufgaben runden den Beitrag ab.

RAABE, KLASSE SCHULE

Grundstrukturen der linearen Algebra – Gruppen und Körper

Oberstufe (Niveau)

Katarina Keck, Buckenhof
Illustrationen von Anna-Greta Wittnebel

Hinweise 1

M 1 Vertauschungen verketten – Aufgaben 3

M 2 Aufgaben zur Operation *Modulo* 5

M 3 Die Gruppe und ihre Begründer 6

M 4 Aufgaben mit Gruppen 7

M 5 Wer war Évariste Galois? 8

M 6 Körper 12

M 7 Vektorräume 13

Lösungen 15

© RAABE 2021

Die Schüler lernen:

die Grundstrukturen der linearen Algebra kennen: Gruppen, Ringe und Körper. Die Konzepte werden erklärt und in vielfältigen Übungsaufgaben angewandt. Ein Lesetext zur Person von Galois wird Schüler, die sich nicht so sehr für Mathematik interessieren, begeistern. Der Beitrag führt schrittweise an die axiomatische Denkweise im Studium heran.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Vertauschungen verketten – Aufgaben	M1	Ab
Aufgaben zur Operation *Modulo*	M2	Ab
Die Gruppe und ihre Begründer	M3	Ab
Aufgaben mit Gruppen	M4	Ab
Wer war Évariste Galois?	M5	Ab
Körper	M6	Ab
Vektorräume	M7	Ab

© RAABE 2021

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

Kompetenzprofil:

Inhalt: Permutation, Operation Modulo, Gruppe, Ring, Körper, Leben von Évariste Galois, Niels Henrik Abel, Vektorraum, Axiome
Medien: GTR/CAS, GeoGebra
Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), Kommunizieren (K6)

Hinweise

Évariste Galois war kaum älter als die Oberstufenschüler, als er – verstrickt in die politischen Wirren des nachrevolutionären Frankreichs – bei einem Duell auf tragische Weise ums Leben kam. Seine mathematischen Ideen hatte er in der Nacht vor dem Duell so hingekritzelt, dass die Nachwelt viele Jahre mit deren Überprüfung und Ausgestaltung zu tun hatte.

Diese altersmäßige Nähe eines der genialsten Mathematiker aller Zeiten motiviert die Schüler, sich mit der von ihm begründeten Strukturmathematik zu beschäftigen.

Galois war ganz versessen darauf, ein Rezept für die Lösung von Gleichungen 5. Grades

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

zu finden, eine der großen Herausforderungen der damaligen Zeit. Lesen Sie in diesem Beitrag, was seine Beschäftigung mit diesem Problem unter anderem abgeworfen hat. Das Erkennen von Strukturen erleichtert den Überblick und ist für viele Bereiche der Mathematik von grundlegender Bedeutung.

© RAABE 2021

Förderung für mathematisch interessierte Schüler!

Mit Überarbeitung der Lehrpläne fielen viele mathematisch reizvolle Inhalte weg und damit weitgehend die Möglichkeit, interessierte Schüler auf die Denkweise der universitären Mathematik vorzubereiten. Die Begriffe *Gruppe*, *Ring* und *Körper* kommen nicht mehr im Lehrplan vor. Ihre Betrachtung ist aber aus strukturmathematischer Sicht aufschlussreich. Lassen wir für die Vektoren außer der Vektoraddition auch die skalare Multiplikation zu, also die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen, so haben wir zwei Rechenoperationen, eine interne (die Addition von zwei Vektoren, bei der wieder ein Vektor herauskommt) und externe (Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl, bei der ebenfalls wieder ein Vektor herauskommt). Dabei bildet die Menge der Vektoren eine Gruppe, die Menge der reellen Zahlen einen Körper. Der Vektorraum ist Gegenstand der Lehrpläne.

Lernvoraussetzungen

Dieser Exkurs hat seinen Platz nach der Einführung der Vektoraddition, wenn deren Eigenschaften (Kommutativität und Assoziativität) behandelt sind.

Ablauf

Die Materialien **M 1** und **M 2** stellen den Schülern zwei besondere Verknüpfungen vor. In M 1 werden Vertauschungen von drei Elementen miteinander verknüpft, M 2 thematisiert die Modulo-Operation.

Wir verwenden in **M 1** das allgemeine Verknüpfungssymbol $\odot$, da man wegen der mangelnden Kommutativität streng darauf achten muss, zuerst die rechts stehende Vertauschung durchzuführen. Dies ist bei der den Schülern bekannten Addition anders. Weisen Sie die Lernenden auf diesen Unterschied hin. Bei der Verkettung von Funktionen begegnen die Schüler diesem Phänomen wieder (im Allg. $f(g(x)) \neq g(f(x))$).

Beispiel:

$f(x) = 3x;\ g(x) = 7x + 1$

$\Rightarrow f(g(x)) = 3(7x + 1) = 21x + 3$ und

$g(f(x)) = 7(3x) + 1 = 21x + 1;\ 31$ q.e.d.

Mit **M 3** führen Sie den Begriff der *Gruppe* ein. Die Schüler überprüfen, ob die Gruppeneigenschaften auch auf die Addition von Vektoren zutreffen, und vernetzen damit ihr bisher erworbenes Wissen. Die Vektoraddition hat die gleichen Eigenschaften wie die Addition von Zahlen. Zuletzt wenden die Schüler den Begriff *Gruppe* auf die Menge der Polynome an.

Im Lesetext **M 5** erfahren die Schüler, was für ein Mensch Évariste Galois war und auf welche Art sein früher Tod mit der politischen Situation im nachrevolutionären Frankreich verknüpft ist. Sein jugendliches Alter ist für die Schüler ein Ansporn. Galois definierte zwar den Begriff der Gruppe (noch) nicht, ist aber nicht nur als Begründer der nach ihm benannten Galoistheorie anzusehen, sondern – neben Niels Henrik Abel (1802–1829) – auch als ein Begründer der Gruppentheorie.

Material **M 6** stellt die Begriffe *Ring* und *Körper* vor. Die Schüler wenden diese neuen Begriffe auf die bisher behandelten Strukturen an. In **M 7** kommt der Begriff des *Vektorraumes* hinzu. Dieser Begriff wurde tatsächlich von den Vektoren abgeleitet. Die Schüler wenden ihn auf die Gruppe der Polynome an. Die Vernetzung mit der Funktionenlehre vollziehen sie, indem sie wiederholen, wie sich der Graph einer Polynomfunktion durch die Multiplikation des Funktionsterms mit einer reellen Zahl verändert.

© RAABE 2021

M 1 Vertauschungen verketten – Aufgaben

Hinweis: Beachten Sie die Reihenfolge!

1. Schreiben Sie alle sechs möglichen Anordnungen der Ziffern 1, 2 und 3 auf:

$$\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\ \\ \end{pmatrix}$$

2. Man kann zwei Vertauschungen hintereinander ausführen. Dabei wird zuerst die <u>rechte</u> Vertauschung ausgeführt.

   Beispiel:

$$\begin{pmatrix}123\\ \downarrow\\ 312\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}123\\ \downarrow\\ 213\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\ \downarrow\\ 132\end{pmatrix}$$

   Die 3 bleibt zunächst fix und wird dann auf die 2 abgebildet, insgesamt wird sie also auf die 2 abgebildet. Die 2 wird auf die 1 abgebildet und diese dann auf die 3, insgesamt wird die 2 also auf die 3 abgebildet. Usw.

   Verknüpfen Sie ebenso – beachten Sie die Reihenfolge!

   a) $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\ \\ \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\ \\ \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\ \\ \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\ \\ \end{pmatrix}$

3.
   a) Was fällt Ihnen an der Aufgabe 2d) auf?

   Hinweis: Die Vertauschung $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$ heißt deswegen ***neutrales Element***.

   b) Welche Zahl hat beim Addieren von Zahlen dieselbe Eigenschaft?

   c) Welcher Vektor übernimmt dieselbe Rolle bei der Vektoraddition?

© RAABE 2021

SCHOOL-SCOUT.DE

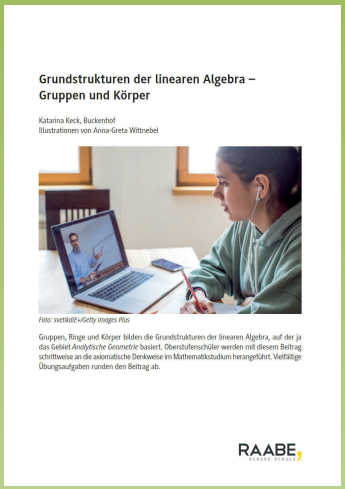
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Grundstrukturen der linearen Algebra

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Grundstrukturen der linearen Algebra – Gruppen und Körper

Katarina Keck, Buckenhof
Illustrationen von Anna-Greta Wittnebel

Foto: svetikd/E+/Getty Images Plus

Gruppen, Ringe und Körper bilden die Grundstrukturen der linearen Algebra, auf der ja das Gebiet *Analytische Geometrie* basiert. Oberstufenschüler werden mit diesem Beitrag schrittweise an die axiomatische Denkweise im Mathematikstudium herangeführt. Vielfältige Übungsaufgaben runden den Beitrag ab.

RAABE, KLASSE SCHULE

© Copyright school-scout.de / e-learning-academy AG – Urheberrechtshinweis
Alle Inhalte dieser Material-Vorschau sind urheberrechtlich geschützt. Das Urheberrecht liegt, soweit nicht ausdrücklich anders gekennzeichnet, bei school-scout.de / e-learning-academy AG. Wer diese Vorschauseiten unerlaubt kopiert oder verbreitet, macht sich gem. §§ 106 ff UrhG strafbar.