



SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

*Analysis: Den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall -
am Beispiel des Corona-Virus*

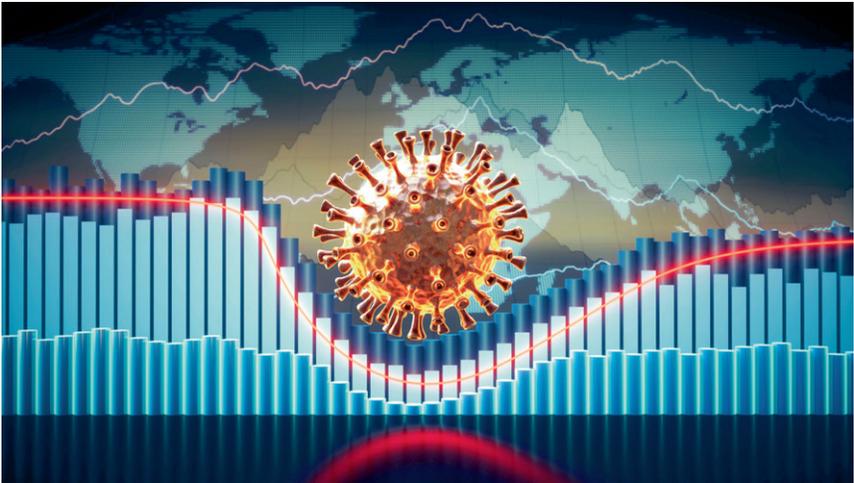
Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)



Den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall berechnen

Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Illustrationen von C. Vöst



© matejmo/E+/Getty Images Plus

Wie viele Menschen infizieren sich wöchentlich durchschnittlich mit dem Corona-Virus? Dies ist nicht nur für die Johns-Hopkins-Universität interessant, sondern stellt eine aktuelle Anwendung des Mittelwerts von Funktionen dar.

Vom Begriff des arithmetischen Mittels ausgehend erarbeiten sich die Lernenden in diesem Beitrag den Mittelwert von Funktionswerten. Dies führt sie schließlich zum Mittelwertsatz der Integralrechnung, dessen Beweis sie ebenfalls kennenlernen. Als Ausblick verweist der Beitrag auf den verwandten Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Die vorgestellten Begriffe vertiefen Ihre Schülerinnen und Schüler an einigen Aufgaben und zur Lernzielkontrolle finden Sie am Ende des Beitrags eine Klassenarbeit.

Den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall berechnen

Oberstufe (weiterführend)

Carlo Vöst, Oliva, Spanien

Illustrationen von C. Vöst

Hinweise	1
M 1 Mittelwert auf Intervall – Theorie	2
M 2 Aufgaben	6
M 3 Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	10
Lösungen	12

Die Schüler lernen:

den Mittelwert von Funktionen, den Mittelwertsatz der Integral- und Differenzialrechnung an konkreten Beispielen kennen und festigen ihr neues Wissen mithilfe von realitätsnahen Aufgaben. Besonders interessierte Lernende erarbeiten sich den Beweis des Mittelwertsatzes der Integralrechnung.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Mittelwert auf Intervall – Theorie	M1	Ab
Aufgaben	M2	Ab
Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	M3	Ab, LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

- Inhalt:** arithmetisches Mittel, Mittelwert von Funktionswerten, Mittelwertsatz der Integralrechnung, Mittelwertsatz der Differentialrechnung
Taschenrechner, CAS-Rechner
- Medien:**
- Kompetenzen:** mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), mathematisch kommunizieren (K6)

Den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall berechnen

Hinweise zum Mittelwert einer Funktion

Den Mittelwert einer Funktion (genauer der Funktionswerte) auf einem Intervall zu berechnen, basiert auf dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, der in diesem Beitrag vorgestellt wird. Der Beweis dieses Mittelwertsatzes ist wohl nur für sehr gute Schülerinnen und Schüler¹ bzw. interessierte Kolleginnen und Kollegen gedacht, welche die Hintergründe genauer interessieren.

Im Lehrplan ist dieses Thema nach der Besprechung des Integralbegriffs angesiedelt und wird deshalb sicherlich eines der letzten Themen im Rahmen der Analysis vor dem Abitur sein.

Bei den unterstützenden Aufgaben sollten Sie darauf achten, dass Ihre Schüler möglichst viele verschiedene Funktionstypen behandeln und dass auch die Anwendungsaufgaben nicht zu kurz kommen.

Sämtliche Aufgaben sind so gestaltet, dass Ihre Schüler sie sowohl durch Zuhilfenahme eines Taschenrechners als auch unter Verwendung eines CAS-Rechners, was in vielen Fällen wesentlich weniger Rechenarbeit erfordert, lösen können.

Das Material **M 3** ist ein Klausurbeispiel zu diesem Thema, das den Lernenden helfen soll, sich auf eine Prüfung zu diesem Thema vorzubereiten. Außerdem können Sie das Klausurbeispiel zur Lernzielkontrolle verwenden.

¹ Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

M 1 Mittelwert auf Intervall – Theorie

Unter dem arithmetischen Mittel M (oder auch arithmetischem Mittelwert m) von n Zahlen a_1, \dots, a_n versteht man:

$$M = \frac{1}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i.$$

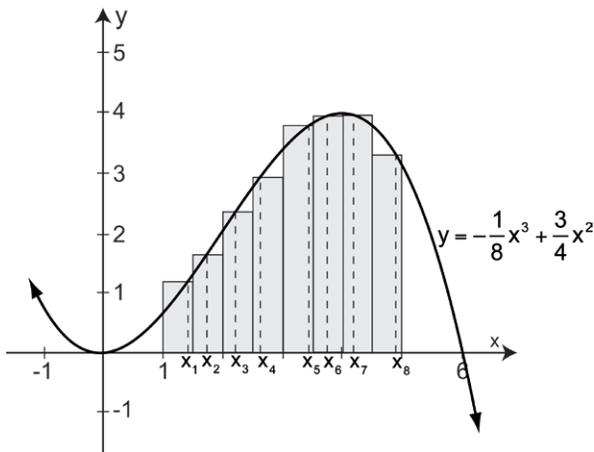
Dies lässt sich auf Funktionswerte übertragen:

Wenn f eine auf einem Intervall $[a; b]$ stetige Funktion ist, geht man folgendermaßen vor:

- Das Intervall $[a; b]$ wird in n Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ unterteilt.
- In jedem Teilintervall nimmt man (beliebig) einen Funktionswert $f(x_i)$
- Man bildet das arithmetische Mittel dieser Funktionswerte: $M = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i)$
- Man formt den Term von M algebraisch um mit $n = \frac{b-a}{\Delta x}$:

$$M = \frac{\Delta x}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^n (f(x_i) \cdot \Delta x)$$

Dieses Vorgehen lässt sich in der folgenden Abbildung erkennen. Es wird beispielhaft die Funktion f , gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$, im Intervall $[1; 5]$ für $n=8$ betrachtet:



© Carlo Vöst



SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

*Analysis: Den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall -
am Beispiel des Corona-Virus*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)

