



# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

**Auszug aus:**

*Analysis: Kugeln, Tangenten und Tangentialebenen*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)



# Kugeln, Tangenten und Tangentialebenen

von Alfred Müller



© LordRunar/E+/Getty Images

In diesem Beitrag trainieren Ihre Schüler unter anderem das Aufstellen von Geradengleichungen, das Anwenden der Hesse-Form zur Abstandsbestimmung eines Punktes zu einer Ebene und das Berechnen des Pyramidenvolumens.

# Kugeln, Tangenten und Tangentialebenen

von Alfred Müller

---

<b>Aufgaben</b>	<b>1</b>
<b>Lösungen</b>	<b>2</b>

---

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Ebenen und ihre gegenseitige Lage; Kugeln, Tangenten und Tangentialebenen; Pyramidenvolumen

**Kompetenzen:** mathematisch argumentieren (K 1), Probleme mathematisch lösen (K 2), mathematische Darstellungen verwenden (K 4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K 5), mathematisch kommunizieren (K 6)

# Kugeln, Tangenten und Tangentialebenen

## Aufgaben

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die beiden Ebenen  $E: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$

und  $F: x_1 + x_2 - x_3 = 0$  sowie die Schar von Kugeln  $K_r: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} \right]^2 = r^2$  mit dem Schar-

parameter  $r$  gegeben.

- Die Ebene  $E$  ist eine Tangentialebene an einer der Kugeln  $K_r$ . Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes  $M$  dieser Kugel, ihren Radius  $r$  sowie die Koordinaten des Berührungspunktes  $B$  auf  $E$  an.
  - Die Ebenen  $E$  und  $F$  schneiden sich in einer Geraden  $s$ . Bestimmen Sie eine Gleichung von  $s$ .
  - Im Punkt  $B$  wird die Kugeltangente  $t$  parallel zur Ebene  $F$  bestimmt. Wie lautet eine Gleichung von  $t$ ?
  - Der Punkt  $M$  der Kugelschar aus Teilaufgabe a) sei die Spitze einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, wobei je zwei Ecken auf den Geraden  $s$  bzw.  $t$  liegen. Berechnen Sie das Volumen einer solchen Pyramide.
2. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Kugel  $K: \vec{x}^2 = 49$  sowie die

Geradenschar  $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  gegeben.

- Warum ist der Winkel  $\alpha$ , den die Geraden  $g_a$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene bilden, nicht vom Parameter  $a$  abhängig? Wie groß ist  $\alpha$ ?
  - Untersuchen Sie zuerst die Lage der Geraden  $g_{-2}$  für  $a = -2$  zu der Kugel  $K$  und dann allgemein die Lage der Geraden  $g_a$  in Bezug auf die Kugel  $K$ . Für welche Werte von  $a$  ergeben sich Tangenten? Geben Sie die Gleichungen dieser Tangenten an.
  - Eine dieser Tangenten liegt in einer Tangentialebene  $T$  an die Kugel. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene  $T$ .
3. Für welche Werte von  $a \in \mathbb{R}^+$  ist der Abstand der Ebene  $E_a: ax_1 + \frac{x_2}{\sqrt{a}} + x_3 = 1$  vom Koordinatenursprung  $O$  extremal und von welcher Art ist dieser Extremwert?



# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

**Auszug aus:**

*Analysis: Kugeln, Tangenten und Tangentialebenen*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)

