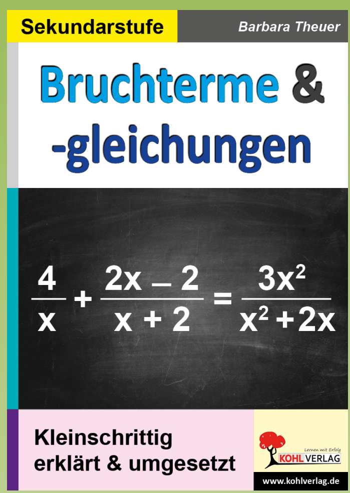
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Bruchterme und Bruchgleichungen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Inhalt

		Seite
	Vorwort	**3**
1	**Worum es geht?**	**4 - 6**
	1.1 Eine Aufgabe zur Einführung	
	1.2 Zahlenrätsel als Beispiel	
	1.3 „Auf einen Nenner gebracht“	
2	**Was sind Bruchgleichungen und welche Schwerpunkte sind beim Lösen zu beachten?**	**7**
3	**Definitionsbereich von Bruchtermen/-gleichungen bestimmen (Blatt 1 bis Blatt 3)**	**8 - 10**
4	**Zur Wiederholung ein kleiner Exkurs in die Bruchrechnung**	**11**
5	**Hauptnenner von Bruchtermen und Bruchgleichungen (Blatt 1 bis Blatt 3)**	**12 - 14**
6	**Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen**	**15**
7	**Bruchgleichungen der einfachsten Form lösen (Blatt 1 bis Blatt 3)**	**16 - 18**
8	**Gleichungen mit Summen von Bruchtermen (Blatt 1 bis Blatt 4)**	**19 - 22**
9	**Bruchgleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen (Blatt 1 bis Blatt 5)**	**23 - 27**
10	**Zahlenrätsel**	**28**
11	**Schnittpunkt von Funktionsgraphen**	**29**
12	**Sachaufgaben mit Bezug zur Physik (Blatt 1 bis Blatt 3)**	**30 - 32**
13	**Herons Brunnen heute**	**33**
14	**Die Lösungen**	**34 - 48**

KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

Vorwort

Im Bildungsplan des Landes Baden-Württemberg wie auch der anderen Bundesländer wird als Ziel des Kompetenzerwerbes für den mittleren Abschluss unter anderem gefordert: „Ich kann quadratische Gleichungen und lineare Gleichungssysteme sowie Bruch- und Potenzgleichungen lösen“. Wie im Jahr 2018 gibt es in den meisten Jahren bei den Prüfungsaufgaben zum Realschulabschluss in Baden-Württemberg eine Aufgabe zum Lösen einer anspruchsvollen Bruchgleichung, wie auch das Titelbild dieses Heftes verrät.

Im Schulalltag lautet hingegen die widerspenstige Antwort vieler Schüler auf die oben geforderte Kompetenz „Wozu braucht man denn das…?“. Wir kennen alle die Zweifel der Schüler an der Notwendigkeit Bruchgleichungen lösen zu müssen – geboren aus den Schwierigkeiten beim Umgang mit diesem Typ von Gleichungen. Und obwohl die Schüler dieses Stoffgebiet gerne umgehen möchten, sind wir Lehrer um so mehr gefordert, speziell bei der Behandlung der Bruchgleichungen zu zeigen, wie man mit dem Werkzeug bekannten Wissens sowie mit Sorgfalt und Ausdauer diese Gleichungen lösen kann.

Zum Motivieren unter dem Vorsatz, dass Bruchgleichungen benötigt werden, um Sachverhalte aus Naturwissenschaft und Technik mathematisch zu modellieren bzw. mit Hilfe von entsprechenden Formeln gesuchte Größen zu ermitteln sowie beim Erlangen von Fertigkeiten beim Lösen dieser Gleichungen, kann der Einsatz vorliegender Arbeitsmaterialien hilfreich sein.

Auf den ersten Seiten soll den Schülern anhand einer Auswahl von repräsentativen Aufgaben wie zum Beispiel einer historischen Aufgabe des Heron von Alexandria und Zahlenrätseln sowie einem Überblick über die Schwerpunkte beim Lösen von Bruchgleichungen ein Eindruck davon vermittelt werden, worum es in diesem Stoffgebiet geht.

Als Bruchgleichungen sind ja bekanntlich solche Gleichungen definiert, bei welchen die Variable mindestens einmal im Nenner der Bruchterme, aus welchen sich die Bruchgleichungen zusammensetzen, vorkommt. Daraus folgt, dass bei der Belegung der Variablen einige Zahlen ausgeschlossen werden müssen, da Division durch Null nicht möglich ist. Eine Vielzahl von Aufgaben fordert deshalb die Bestimmung des Definitionsbereiches von Bruchtermen und Bruchgleichungen – der Menge der für die Belegung der Variablen zugelassenen Zahlen.

Zum Handwerkszeug beim Lösen von Bruchgleichungen gehören insbesondere auch Kenntnisse und Fähigkeiten beim Ermitteln des Hauptnenners als kleinstes gemeinsames Vielfaches der auftretenden Nenner, Faktorisieren von Summen sowie Gleichnamigmachen und Erweitern von Brüchen – wobei alles, was für Brüche gilt, nun auf Bruchterme übertragen werden muss.

Deshalb werden in diesem Arbeitsheft zahlreiche Aufgaben zur „Kleinarbeit“ mit Termen vorangestellt, bevor es an das Lösen von Bruchgleichungen mit aufsteigendem Schwierigkeitsgrad geht. Die entsprechenden Seiten dazu bilden den Schwerpunkt des Heftes. Hier gibt es Aufgaben – angefangen von den einfachsten Formen bis hin zu Bruchgleichungen, die nach dem Umformen zu quadratischen Gleichungen führen – mit Orientierung an den entsprechenden Aufgaben zum Realschulabschluss in Baden-Württemberg.

Dabei werden die Schüler mit ausführlich erläuterten Beispielen und Lösungshilfen an das selbstständige Lösen dieser Aufgaben herangeführt.

Sachaufgaben zu physikalischen Anwendungen im letzten Kapitel und „Röhrenaufgaben“– wie schon zu Herons Zeiten bekannt – sollen dazu beitragen, den Schülern bewusst zu machen, dass Bruchgleichungen in der Praxis gelöst werden müssen und runden unter fachübergreifendem Aspekt das Thema Bruchgleichungen ab.

Viel Erfolg beim Einsatz dieser Arbeitsmaterialien wünschen das Kohl-Verlagsteam und

Barbara Theuer

1 Worum es geht?

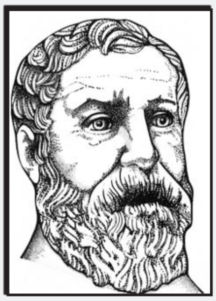
1.1 Eine Aufgabe zur Einführung

Aufgabe 1: *Welche Erkenntnisse auf mathematischem Gebiet schreibt man Heron von Alexandria zu? Nenne zwei bedeutsame Beispiele.*

____

____

Eine historische Aufgabe



Heron von Alexandria gehört neben Pythagoras, Euklid, Aristoteles und Archimedes, um nur einige zu nennen, zu den bedeutendsten Forschern der antiken Wissenschaften.

Er lebte wahrscheinlich – seine Lebensdaten sind nicht exakt belegt – im ersten Jahrhundert nach Christus. Herons Schriften zeugen von seinen Forschungen auf dem Gebiet der Mathematik, Naturwissenschaft und Technik.

In seinem Werk „Metrica" findet sich folgende Aufgabe in Form eines Epigramms:

> Vier Springbrunnen es gibt, die Zisterne anfüllet der erste täglich; der andere braucht zwei Tage dazu, und der dritte drei, und der vierte gar vier.
>
> Welche Zeit nun brauchen zugleich sie?*

* Entnommen aus dem Artikel des Landesbildungsservers Baden-Württemberg „Der Beitrag griechischer Mathematiker", http://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/zahl/terme/geschichte/4griechen.html

Aufgabe 2: *Schätze, welche Zeit zum Füllen der Zisterne benötigt wird, wenn alle vier Brunnen zugleich laufen. Kreuze an.*

☐ **A** 10 Tage ☐ **B** 4 Tage ☐ **C** 1 Tag

☐ **D** etwa $\frac{1}{2}$ Tag ☐ **E** $\frac{1}{4}$ Tag ☐ **F** etwa $\frac{1}{10}$ Tag

Aufgabe 3: *Welche Gleichungen sind zum Lösen der Aufgabe passend? Kreuze an.*

☐ **A** $1 + 2 + 3 + 4 = x$ ☐ **B** $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{1}{x}$

☐ **C** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{x}$ ☐ **D** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = x$

☐ **E** $\frac{4}{10} = \frac{1}{x}$ ☐ **F** $\frac{12}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{x}$

Aufgabe 4: *Löse Herons Aufgabe auf einem Extrablatt.*

1 Worum geht es?

1.2 Zahlenrätsel als Beispiel

1. Ein einfaches Zahlenrätsel

Wenn man das Doppelte einer um $\frac{1}{2}$ vermehrten Zahl durch das Dreifache dieser um $\frac{1}{2}$ verminderten Zahl dividiert, erhält man 1.
Um welche Zahl handelt es sich?

Lösungsschritte:

➲ Gleichung aufstellen: $\dfrac{2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)}{3 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)} = 1$

➲ Definitionsbereich ermitteln: $D = R \setminus \{ \frac{1}{2} \}$, da der Nenner nicht Null werden darf

➲ Umformung der Bruchgleichung: Beide Seiten der Gleichung mit Nenner multiplizieren

$\rightarrow \quad 2 \cdot (x + \frac{1}{2}) = 3 \cdot (x - \frac{1}{2}) \quad |$ Klammern ausmultiplizieren

$2x + 1 = 3x - \frac{3}{2} \quad | -3x \quad | -1$

$-x = -\frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{5}{2}; \quad \frac{5}{2} \in D$

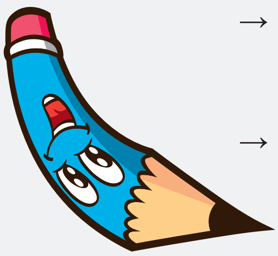
Antwort: Die gesuchte Zahl heißt $\frac{5}{2}$.

2. Ein Zahlenrätsel für Experten

Gibt es eine Zahl, für die gilt:
Der Quotient aus dem um 1 verminderten Quadrat dieser Zahl und der um 1 verminderten Zahl soll gleich dem Doppelten der gesuchten Zahl sein.

Lösungsschritte:

– Gleichung aufstellen: $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2x$
– Definitionsbereich ermitteln: $D = R \setminus \{ 1 \}$, da der Nenner nicht Null werden darf
– Umformung der Bruchgleichung: Beide Seiten der Gleichung mit Nenner multiplizieren



$\rightarrow \quad x^2 - 1 = 2x \cdot (x - 1) \quad |$ Klammer ausmultiplizieren

$x^2 - 1 = 2x^2 - 2x \quad |$ Zusammenfassen und ordnen bis zur Normalform

$\rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$

– Lösen der quadratischen Gleichung: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 1} = 1$

Antwort: ________________________________

Begründung: ________________________________

____

Aufgabe: *Ergänze die Antwort zum zweiten Zahlenrätsel und begründe deine Entscheidung.*

1 Worum geht es?

1.3 „Auf einen Nenner gebracht“

Bruchgleichung mit mehreren Summanden lösen

Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{2 \cdot (x-3)} - \frac{1}{(x+3)} = \frac{5}{4 \cdot (x^2-9)}$

Lösungsschritte:

– Definitionsbereich ermitteln: D= R \ { 3; – 3}, da der Nenner nicht Null werden darf.

– Um die Bruchgleichung in eine „normale“ Gleichung umzuformen, erweitern wir alle Summanden auf beiden Seiten der Gleichung mit einem geeigneten Faktor, sodass als Nenner der Hauptnenner entsteht. Dazu muss der Hauptnenner zunächst ermittelt werden.

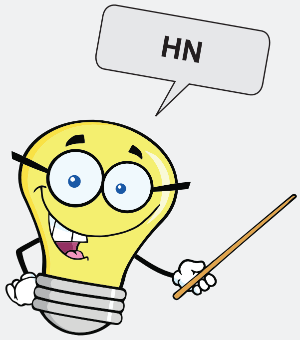
Bestimmung des Hauptnenners:

1. Nenner: $2 \cdot (x-3)$

2. Nenner: $(x+3)$

3. Nenner: $4 \cdot (x^2-9) = 2^2 \cdot (x-3) \cdot (x+3)$

Hauptnenner HN: $\boldsymbol{2^2 \cdot (x-3) \cdot (x+3)}$



– Erweitern der Summanden: $\frac{1 \cdot \mathbf{2 \cdot (x+3)}}{2 \cdot (x-3) \cdot \mathbf{2 \cdot (x+3)}} - \frac{1 \cdot \mathbf{4 \cdot (x-3)}}{(x+3) \cdot \mathbf{4 \cdot (x-3)}} = \frac{5}{4 \cdot (x^2-9)}$

– Multiplizieren mit dem HN: $2(x+3) - 4(x-3) = 5$

– Ausmultiplizieren: $2x + 6 - 4x + 12 = 5$

– Zusammenfassen: $-2x + 18 = 5$

$x = \frac{13}{2}$

Lösungsmenge: $L = \left\{\frac{13}{2}\right\}$, da $\frac{13}{2} \in D$

Aufgabe 1: *Um die Bruchgleichung*

$\frac{4}{x} + \frac{2x-2}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2+2x}$

zu lösen, muss man den Hauptnenner bilden. Welcher Term ist der Hauptnenner? Kreuze an.

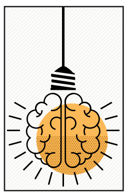
☐ **A** $x \cdot (x+2)$

☐ **B** $(x+2)$

☐ **C** $x \cdot (x+2) \cdot (x^2+2x)$

Zur Erinnerung:

Der **Hauptnenner HN** mehrerer Brüche ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner dieser Brüche.



Beispiel:

$\frac{1}{6}, \frac{3}{8}$ und $\frac{2}{3}$; $6 \cdot 8 \cdot 3 = 144$ ist zwar ein gemeinsames Vielfaches der Nenner aber kein HN, weil 144 nicht das kleinste gemeinsame Vielfache ist. Der Hauptnenner ist die Zahl 24.

Aufgabe 2: *Gegeben ist die Gleichung*

$\frac{6}{4x^2 + 12x + 9} + \frac{4x}{2x+3} = 2$

Ist der Term $(4x^2 + 12x + 9) \cdot (2x + 3)$ *der Hauptnenner? Begründe deine Entscheidung.*

2 Was sind Bruchgleichungen und welche Schwerpunkte sind beim Lösen zu beachten?

Definition:
Unter einer Bruchgleichung versteht man in der Algebra eine Bestimmungsgleichung mit mindestens einem Bruchterm, bei welchem die Variable im Nenner steht.

<u>Beispiele</u>: $\frac{5}{(x+3)} - 6 = 2x$ ist eine Bruchgleichung.

$\frac{(x+3)}{5} - \frac{1}{6} = \frac{x}{2}$ ist keine Bruchgleichung.

Schwerpunkte beim Lösen von Bruchgleichungen:

Beispiel: $\frac{3}{(x^2-1)} = \frac{1}{x \cdot (x-1)}$

– Da Division durch Null nicht erlaubt (nicht definiert) ist, müssen zunächst alle Zahlen ausgeschlossen werden, bei deren Einsetzung einer der auftretenden Nenner den Wert Null annimmt. Dann wird die Definitionsmenge, welche diese Zahlen nicht enthalten darf, notiert. Für $x = 1$, $x = -1$ und $x = 0$ nimmt jeweils ein Nenner den Wert Null an.

Der Definitionsbereich (auch Definitionsmenge) der Bruchgleichung ist folglich $D = R \setminus \{1; -1; 0\}$.

– Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner* führt man Bruchgleichungen auf Gleichungen einfacheren Typs („normale Gleichungen“) zurück, wobei der zuvor festgelegte Definitionsbereich der Bruchgleichung auch für die umgeformte einfache Gleichung gilt.

* Analog zu den Brüchen ist unter dem Hauptnenner HN von Bruchtermen der Nenner zu verstehen, welcher die in den Nennern sämtlicher Summanden der Bruchgleichung auftretenden Faktoren in ihrer höchsten Potenz enthält.

Im Beispiel ist der Hauptnenner: $(x-1) \cdot (x+1) \cdot x$ bzw. $(x^2-1) \cdot x$

– Nach Multiplikation mit dem HN ergibt sich $3x = x + 1$; $D = R \setminus \{1; -1; 0\}$.

– Die vereinfachte Gleichung wird dann mit den üblichen Lösungstechniken (Äquivalenzumformungen) gelöst.

– Die Lösung $x = \frac{1}{2}$ der einfachen Gleichung gehört zum Definitionsbereich der Bruchgleichung und ist somit auch Lösung der Bruchgleichung.

<u>**Aufgabe 1**</u>: *Entscheide, ob es sich bei den folgenden Gleichungen um Bruchgleichungen im arithmetischen Sinn handelt. Kreuze an.*

☐ **A** $\frac{3}{x^2} + \frac{2}{(x-1)} = -3$ ☐ **B** $\frac{x^2}{3} + \frac{(x-1)}{2} = -\frac{1}{3}$ ☐ **C** $\frac{3x^2}{2} = \frac{x}{5}$

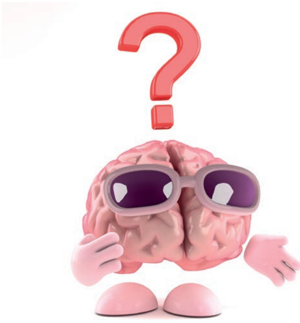
<u>**Aufgabe 2**</u>: *Mache zu dem oben vorgestellten Beispiel die schriftliche Probe.*

3 Definitionsbereich von Bruchtermen/-gleichungen bestimmen (Blatt 1)

Aufgabe 1: *Um das „Verbot“ der Division durch Null zu begründen, werden folgende Argumente angegeben. Welche Antwort ist richtig?*

A

Egal, welche reelle Zahl a man durch Null dividiert; das Ergebnis ist immer Null.
$a : 0 = 0;\ a \in R$



B

Wenn es eine reelle Zahl z gibt, so dass gilt: $a : 0 = z\ (a \neq 0)$, muss aus der Umkehrung der Division folgen: $0 \cdot z = a$, was bedeutet, dass das Produkt a Null wird. Das ist aber ein Widerspruch zu der Bedingung $a \neq 0$.

Aufgabe 2: *Für welche Zahlen sind nachfolgende Bruchterme nicht definiert? Ergänze die Tabelle.*

Bruchterm	nicht definiert für
$\frac{5x}{(x+5)}$	x =
$\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{x}{(x-1)} + \frac{3}{(x+2)}$	x_1 = x_2 = x_3 =
$\frac{3}{(x-3) \bullet (x+1)}$	
$\frac{5x}{(x+3) \bullet (x-1)}$	
$\frac{2}{x^2+3x}$	
$\frac{x+1}{x^2-4x+4}$	
$\frac{x^2}{x^2-9} + \frac{x-1}{x^2-1}$	
$\frac{x}{x^2+4}$	

Bruchterme und Bruchgleichungen

1. Digitalauflage 2019

Inhalt: Barbara Theuer
Umschlagbild: © pattilabelle - AdobeStock.com
Grafik & Satz: Kohl-Verlag

Bildnachweis wikipedia: Seite 4: © Heron of Alexandria, gemeinfrei;

Bildnachweise AdobeStock.com: Seite 4: © Vadimsadovski; © Cartoon images; **Seite 5:** © ajarecki; © mhatzapa; © Maksim; **Seite 6:** © hultimus; © Jürgen Fälchle; © HitToon; © Yael Weiss; © cienpiesnf; **Seite 7:** © nyamol; Steve Young; **Seite 8:** © fad82; © Steve Young; **Seite 9:** © Yael Weiss; © cienpiesnf; Steve Young; **Seite 10:** © Christos Georghiou; **Seite 11:** © cienpiesnf; © meen_na; **Seite 12:** © alekseymartynov; © cienpiesnf; © Steve Young; **Seite 13:** © HitToon; **Seite 14:** © Daniel Fuhr; © hultimus; © mhatzapa; Gstudio Group; **Seite 15:** © Gstudio Group (2x); © drawkman; lineartestpilot; **Seite 16:** © visible3dscience; © Yael Weiss; **Seite 17:** © tigatelu; Gstudio Group; **Seite 18:** © HitToon; © Steve Young; **Seite 19/20:** © Steve Young; **Seite 21:** © Yael Weiss (2x); © MMphotos; © alekseymartynov; **Seite 23:** © Michael Flippo; © nyamol; © cienpiesnf; **Seite 24:** © Steve Young; © Gstudio Group; © agaes8080; **Seite 25:** © Gstudio Group; Steve Young; © visible3dscience; **Seite 26/27:** © Gstudio Group; **Seite 28/29:** © Steve Young; **Seite 30:** © M. Schuppich; © Maksym Yemelyanov; **Seite 31:** © Lady-Luck (2x); antimartina; © owattaphotos; **Seite 32:** © vegefox.com; **Seite 33:** © Cartoon images; **Seite 41:** © MMphotos

Bestell-Nr. P12 292

ISBN: 978-3-96624-531-9

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Bruchterme und Bruchgleichungen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de