

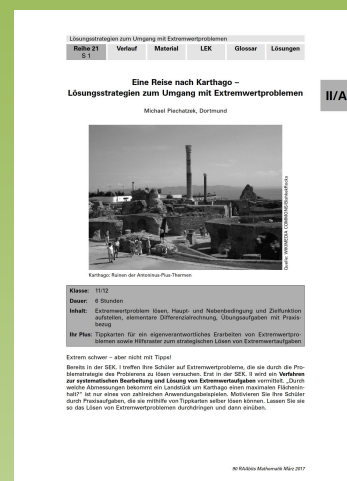
# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus: *Eine Reise nach Karthago*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)

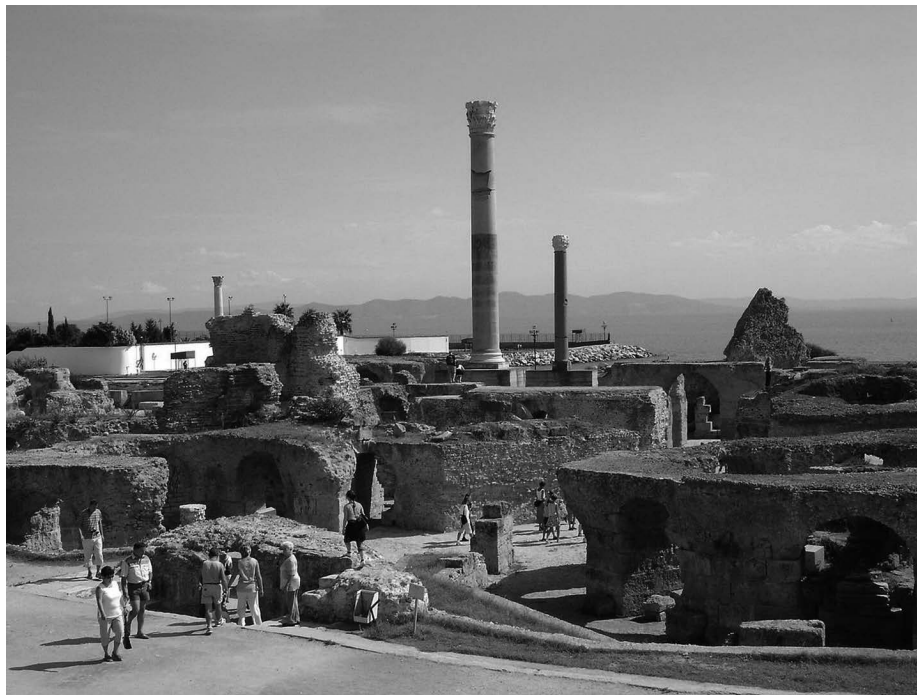


Reihe 21 S 1	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	---------	----------	-----	---------	----------

## Eine Reise nach Karthago – Lösungsstrategien zum Umgang mit Extremwertproblemen

Michael Piechatzek, Dortmund

II/A



Quelle: WIKIMEDIA COMMONS/BishkekRocks

Karthago: Ruinen der Antoninus-Pius-Thermen

**Klasse:** 11/12

**Dauer:** 6 Stunden

**Inhalt:** Extremwertproblem lösen, Haupt- und Nebenbedingung und Zielfunktion aufstellen, elementare Differenzialrechnung, Übungsaufgaben mit Praxisbezug

**Ihr Plus:** Tippkarten für ein eigenverantwortliches Erarbeiten von Extremwertproblemen sowie Hilfsraster zum strategischen Lösen von Extremwertaufgaben

Extrem schwer – aber nicht mit Tipps!

Bereits in der SEK. I treffen Ihre Schüler auf Extremwertprobleme, die sie durch die Problemstrategie des Probierens zu lösen versuchen. Erst in der SEK. II wird ein **Verfahren zur systematischen Bearbeitung und Lösung von Extremwertaufgaben** vermittelt. „Durch welche Abmessungen bekommt ein Landstück um Karthago einen maximalen Flächeninhalt?“ ist nur eines von zahlreichen Anwendungsbeispielen. Motivieren Sie Ihre Schüler durch Praxisaufgaben, die sie mithilfe von Tippkarten selber lösen können. Lassen Sie sie so das Lösen von Extremwertproblemen durchdringen und dann einüben.

## Didaktisch-methodische Hinweise

Das **Optimieren** (= Extremwertesuchen) ist eine der Grundtätigkeiten des Mathematikers. Dabei geht es immer darum, das Maximum bzw. Minimum einer Funktion zu finden, die in der Regel erst entsprechend der Aufgabenstellung aufgestellt werden muss. Das Optimieren spielt in vielen Anwendungsbereichen eine Rolle, vor allem in der **Wirtschaft**. Zum Teil kann man diese Anwendungen schon in der gymnasialen Oberstufe begreifen. Schön ist, dass es sich nicht um abstrakte Überlegungen handelt, die im Elfenbeinturm angestellt worden sind, sondern dass alle Aufgaben dieses Gebiets **Praxisbezug** haben. Gern werden Optimierungsaufgaben deshalb auch in der **schriftlichen Abiturprüfung** gestellt. Neben der Differenzialrechnung gibt es alternative Möglichkeiten, Optimierungsaufgaben zu lösen. Damit zeichnen sich diese Aufgaben durch eine große Vielfalt an Lösungsmöglichkeiten aus.

Heuristiken, sog. **Problemlösestrategien**, spielen in der SEK. II eine besondere Rolle, wenn es um die Bearbeitung von Extremwertproblemen geht. Der Beitrag vermittelt ein Verfahren, wie man solche Probleme angehen kann. Eigenverantwortliches Arbeiten an vielfältigen Problemstellungen steht dabei im Vordergrund. So zu lernen ist die effektivste Methode, um neue Strukturen besser zu erfassen und zu memorieren.

Extremwertprobleme bergen eine für Schüler große Schwierigkeit: die Übersetzung von Aufgabenkontexten in die Mathematik. Dabei stellt sich stets die Frage, wie an eine Aufgabe herangegangen werden kann. Tippkarten helfen, indem sie erste Hemmschwellen von Schülern beseitigen und einen Weg zur Lösung des Problems aufzeigen. Das Einüben des Lösens nach einem vorgeschriebenen Raster gibt dem Schüler Sicherheit.

Mit Optimierungsaufgaben fördern Sie nicht nur das Textverständnis, sondern insbesondere Kompetenz im **mathematischen Modellieren**. Optimierungsfähigkeiten lassen sich als **fächerverbindende Projekte** unterrichten. Vielleicht haben Sie als Zweitfach Wirtschaft oder auch Physik. Dann ist es für Sie einfach, wirtschaftliche Zusammenhänge oder auch physikalische Sachverhalte in Ihren Unterricht einzubauen. Wenn nicht, tauschen Sie sich mit Ihren Kollegen aus. In jedem Fall können Sie an realen Beispielen zeigen, wozu mathematische Berechnungen dienen. Sie vermitteln Ihren Schülern Fertigkeiten, die für sie im späteren Berufsleben von Bedeutung sein können. Bei Optimierungsaufgaben bietet es sich an, mit **dynamischer Geometriesoftware (GeoGebra)** den funktionalen Zusammenhang zu veranschaulichen. Gehen Sie dazu mit Ihren Schülern in den Computerraum, sodass immer zwei Schüler gemeinsam einen Computerarbeitsplatz nutzen.

### Lehrplanbezug: Differenzial- und Integralrechnung zur Vorbereitung des Abiturs

Die Differenzial- und Integralrechnung bildet das zentrale Thema der Klassenstufen 11 und 12. Bereits in Klasse 11 enthält z. B. der Lehrplan Bayern<sup>1</sup> die Berechnung lokaler Extremwerte (13 Stunden).

### Voraussetzungen für den Einsatz der Materialien

Ihre Schüler kennen die Lösungsverfahren der **elementaren Differenzialrechnung**. Vor allem müssen Ihre Schüler fit sein im **Bilden der ersten und zweiten Ableitung**. Sie kennen die **notwendige und hinreichende Bedingung für Extrempunkte** einer Funktion.

### Minimalplan

Wenn wenig Zeit zur Verfügung steht, so lassen Sie das Einführungsbeispiel **M 1** weg und starten mit Material **M 2**. Als Hausaufgabe lösen Ihre Schüler die Aufgabe 2 von **M 3**, wobei sie sich vorher das Step-by-Step-Lösungsraster klarmachen. Auch die Übungsaufgaben lösen Ihre Schüler als Hausaufgabe. Die Lösungen lassen Sie im Plenum vortragen. Die Lernerfolgskontrolle entfällt in diesem Fall.

<sup>1</sup> <http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26192>

<b>Reihe 21</b> S 3	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen</b>
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

### Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Die zentrale Leitidee in der SEK. II ist der funktionale Zusammenhang. Ihre Schüler wenden elementare Kenntnisse aus der SEK. I und der Einführungsphase beim Lösen von Extremwertproblemen an und vertiefen diese an kontextbezogenen Übungen.

**II/A**

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K 1, K 6	L 1, L 4	... lernen den Begriff des Extremwertproblems kennen ( <b>M 1, M 2</b> ),	I
K 1, K 2, K 6	L 1, L 4	... lernen Strategien für den Umgang mit Extremwertproblemen kennen ( <b>M 2, M 3</b> ),	I, II
K 5	L 1, L 4	... stellen die Haupt- und Nebenbedingung und die Zielfunktion von Extremwertproblemen auf und lösen das Problem ( <b>M 2– M 4</b> ),	II, III
K 3	L 1, L 4	... lernen den Begriff des Extremwertproblems in alltäglichen Situationen kennen ( <b>M 3–M 6</b> ).	I–III

Für welche Kompetenzen und Anforderungsbereiche die Abkürzungen stehen, finden Sie auf beiliegender CD-ROM 65.

### Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1	<b>Die Gründung Karthagos – mit einer Kuhhaut ein möglichst großes Stück Land umspannen</b> Motivation und Idee des Extremwertbegriffs	1.
M 2	<b>Anleitung für ein Rechteck – den Flächeninhalt maximieren</b> Eine erste Extremwertaufgabe und Tippkarten für eine zielgeleitete Lösung des Problems	2./3.
M 3	<b>Step by Step – ein Hilfsraster zum Lösen von Extremwertproblemen</b> Das strukturierte Erarbeiten der Lösung eines Extremwertproblems	4.
M 4	<b>Machen Sie sich fit im Umgang mit Extremwertaufgaben!</b> Übungsaufgaben	5.
M 5	<b>Mit Tipps zum Erfolg – Tippkarten</b> Tipps zum sicheren Umgang mit Extremwertaufgaben	
M 6 (LEK)	<b>Testen Sie Ihr Wissen!</b> Den Lernerfolg feststellen	6.

## M 2                      Anleitung für ein Rechteck – den Flächeninhalt maximieren

### Aufgabe 1

Hannes Hartmann hat ein Problem: Für einen Bilderrahmen soll er die Seitenlängen eines Rechtecks berechnen, welches einen Umfang von exakt einem Meter hat und einen maximalen Flächeninhalt haben soll. Hannes faltet, rechnet und denkt, kommt allerdings zu keinem sinnvollen Ergebnis. Können Sie ihm weiterhelfen?



II/A

**Merkkasten zu Extremwertproblemen**

**Definition:** Oft wird in mathematischen Berechnungen der „größte“ oder „kleinste“ Wert gesucht, den eine Funktion annehmen kann. Kann man aus mehreren Bedingungen eine sogenannte **Zielfunktion** bestimmen, von welcher ein **Maximum** bzw. **Minimum** berechenbar ist, so spricht man von einem **Extremwertproblem mit Nebenbedingung**.

Folgende Tipps helfen Ihnen beim Umgang mit dieser Aufgabe:

✂	<p><b>1. Tipp</b></p> <p>Was ist Ziel der Aufgabe? Bilden Sie eine <b>Hauptbedingung</b>.</p>	<p><b>1. Lösung</b></p> <p>Ziel ist es, den Flächeninhalt eines Rechtecks bei gegebenem Umfang <u>maximal</u> werden zu lassen.</p> <p>Eine dazu passende <b>Hauptbedingung</b> stellt die folgende Gleichung dar:</p> $A = a \cdot b$
✂	<p><b>2. Tipp</b></p> <p>Welche mathematischen Informationen lassen sich der Aufgabe noch entnehmen? Bilden Sie eine <b>Nebenbedingung</b>.</p>	<p><b>2. Lösung</b></p> <p>Der Umfang des Rechtecks soll 1 Meter betragen. Eine passende <b>Nebenbedingung</b> ist die Gleichung:</p> $1 = 2a + 2b$
✂	<p><b>3. Tipp</b></p> <p>Wie können die beiden Gleichungen miteinander verknüpft werden? Hinweis: Denken Sie an das Lösen von linearen Gleichungssystemen.</p>	<p><b>3. Lösung</b></p> <p>Formt man die Nebenbedingung um und setzt diese in die Zielfunktion ein, so erhält man eine Verknüpfung beider Gleichungen.</p>
✂	<p><b>4. Tipp</b></p> <p>Wie sieht demnach die <b>Zielfunktion</b> aus?</p>	<p><b>4. Lösung</b></p> $1 = 2a + 2b \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} - b$ <p>Einsetzen in die Hauptbedingung liefert:</p> $A(b) = \left(\frac{1}{2} - b\right) \cdot b = \frac{1}{2}b - b^2$

# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus: *Eine Reise nach Karthago*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)

