# GC15001-5G0(12.0) 

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus: <br> Stationenlernen Rund um den Kreis

Das komplette Material finden Sie hier:
School-Scout.de

## Stationenlernen

Rund um den Kreis


## Inhaltsverzeichnis

Didaktisch - methodische Hinweise ..... Seite ..... 4
Laufzettel: Die Berechnung der Kreisfläche ..... Seite ..... 9
Parcours 1: Berechnung der Kreisfläche über »umbeschriebene« Rechtecke ..... Seite ..... 10
Parcours 2: Berechnung der Kreisfläche über »einbeschriebene« Rechtecke Seite ..... 19
Parcours 3: Die Berechnung der Kreisfläche über einbeschriebene und umbeschriebene Sechsecke ..... Seite ..... 28
Parcours 4: Berechnung der Kreisfläche über Trapeze Seite ..... 33
Parcours 5: Die Berechnung der Kreisfläche über einem Achteck ..... Seite 38
Parcours 6: Die Berechnung der Kreisfläche über ein einbeschriebenes und ein umbeschriebenes Quadrat Seite ..... 42
Parcours 7: Die Berechnung der Kreisfläche über das Auszählen von Kästchen ..... Seite ..... 46
Parcours 8: Die Berechnung der Kreisfläche durch Zusammenlegen von Sektoren Seite ..... 49
Parcours 9: Die Berechnung der Kreisfläche durch Schneiden und Schätzen Seite ..... 52
Parcours 10: Die Berechnung der Kreisfläche durch Wiegen ..... Seite 55
Parcours 11: Die Berechnung der Kreisfläche mit Hilfe von Zufallszahlen: Die Bernoulli-Methode Seite ..... 58
Parcours 12: Die Berechnung der Kreisfläche mithilfe des Kreisumfangs I Seite ..... 65
Parcours 13: Die Berechnung der Kreisfläche mithilfe des Kreisumfangs II ..... Seite 70

## Didaktisch-methodische Hinweise

Diesem Stationenlernen liegen verschiedene methodische Konzepte zugrunde.
Die Stationen 1-4 und 6-8 benutzen im Prinzip einen Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$, also das Prinzip der vollständigen Induktion. Auch wenn diese in der Sekundarstufe I nicht durchführbar ist, so sollte man doch auf keinen Fall darauf verzichten, den Grenzübergang zumindest anzudeuten, zumal es in der Mathematik der Sekundarstufe I Grenzübergänge selten gibt, weil das Thema »Folgen und Reihen« aus dem Lehrplan herausgenommen wurde.
Am einfachsten ist der Grenzübergang bei den Parcours 1 und 2 durchzuführen.

## Parcours 2:

Hier benutzt man am besten die Zeichnung mit dem Viertelkreis, die man günstiger Weise auf Folie zieht. Durch Halbierung des Rechtecks $\mathrm{A}_{9}$ und der anschließenden Kreisabschnitthälfte erzeugt man weitere Rechtecke. Hier lässt sich durch die Schraffuren einsichtig machen, welche Flächenteile zur vorigen »Zackenfläche« hinzuaddiert werden, sodass sich diese Fläche besser an den Kreis von innen her anschmiegt.

Man sieht dann schnell ein, dass bei weiterer Unterteilung des Kreisradius in $\frac{r}{30}, \frac{r}{40}$, usw. die innere »Zackenfläche« - wenn die Unterteilung nur genügend fein ist - ganz allmählich in die Kreisfläche übergeht. Da $n$ von den Schülern und Schülerinnen nicht als unendlich gedacht werden kann, bleibt für sie immer noch ein winziges Stückchen der »Zackenfläche« übrig, um die die »Zackenfläche« kleiner als
 die Kreisfläche ist. Die Kreisfläche wird also immer etwas größer bleiben. Der Denkvorgang bis hierher ist aber völlig ausreichend, um das Problem erkannt zu haben.

## Parcours 1:

Man kann natürlich statt des Parcours 2
auch Parcours 1 wählen. Der
Denkvorgang ist der gleiche wie bei Parcours 2. Es ergibt sich hier aber eine weitere Möglichkeit, das Problem der Flächenannäherung einsichtig zu machen. Nimmt man nämlich weitere Unterteilungen der vorhandenen Rechtecke wie in Parcours 2 vor, so kann man die jetzt übriggebliebenen Teilrechtecke abschneiden, sodass nun auch durch das praktische Wegnehmen die äußere »Zackenfläche« immer

## Didaktisch-methodische Hinweise

## Parcours 3:

Auch hier lässt sich eine Verfeinerung durchführen, indem man auf 12-, 24-, 48-Ecke übergeht. Das ist aber mathematisch gesehen sehr aufwändig und führt zu der
Formel:

$$
A_{n}=n \cdot a_{n} \cdot \frac{r}{2} \cdot \sqrt{1-\frac{a_{n}^{2}}{4 r^{2}}}
$$

$\mathrm{A}_{\mathrm{n}}$ Flächeninhalt des regelmäßigen Vielecks
$\mathrm{n} \cdot \mathrm{a}_{\mathrm{n}}=\mathrm{u}_{\mathrm{n}}$ Umfang des regelmäßigen Vielecks (s. Abb. 3)
Es ist wichtig, dass man den Mittelwert der ein- und umbeschriebenen Dreiecke bildet, denn jede Methode für sich allein genommen ist für die Schüler und Schülerinnen nicht »genau« genug. Es würde im Unterricht ja auch reichen, eine Methode durchzuführen und die Formel für die andere vorzugeben, um dann den Mittelwert zu bilden. Der Mittelwert hat eine Genauigkeit von 96,5 \%.
Man kann natürlich auch die Ungenauigkeit der Methode der einbeschriebenen Dreiecke, die größer ist als die der umbeschriebenen Dreiecke, dazu benutzen, die Notwendigkeit der Ermittlung der Fläche der umbeschriebenen Dreiecke deutlich zu machen, um dann den Mittelwert bestimmen zu können. Der Weg, so überzeugend er ist, kostet natürlich Zeit und ist im Anspruch höher.

Berechnung von $\mathrm{s}_{\mathrm{n}}: \cos 30^{\circ}=\frac{\mathrm{s}_{\mathrm{n}}}{\mathrm{r}}$

$$
\frac{s_{n}}{1}=0,8660
$$

Berechnung von $a_{n}: \tan 30^{\circ}=\frac{\frac{a_{n}}{2}}{r}$

$$
\frac{a_{n}}{2}=0,5773
$$

Abb. 3

$A_{1}=A_{M A B}-A_{M A C}$
$A_{1}=\frac{r \cdot \frac{a_{n}}{2}}{2}-\frac{\pi \cdot r^{2}}{12}$
und weil $r=1$
$A_{1}=\frac{a_{n}}{4}-\frac{\pi}{12}$
$A_{1}=0,2887-0,2618$
$\mathrm{A}_{1}=0,0269$
$\mathrm{A}_{2}=\mathrm{A}_{\text {MAC }}-\mathrm{A}_{\text {MDC }}$
$\mathrm{A}_{2}=\frac{\pi}{12}-\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{n}} \cdot \frac{\mathrm{r}}{2}}{2}$
und weil $r=1$
$\mathrm{A}_{2}=\frac{\pi}{12}-\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{n}}}{4}$
$\mathrm{A}_{2}=0,2618-0,2165$
$\mathrm{A}_{2}=0,0453$
$A_{2}$ ist also nahe doppelt so gro $ß$ wie $A_{1}$.

## Didaktisch-methodische Hinweise

Einfacher ist die Methode der ein- bzw. umbeschriebenen Dreiecke, wenn man trigonometrische Funktionen zur Verfügung hat. Die sind in Klasse 9 aber nicht Thema des Mathematikunterrichts. Da der Zugang unter diesen Voraussetzungen aber nicht schwer ist, bietet es sich in Klasse 10 an, die Kreisflächenformel als Anwendungsaufgabe der Trigonometrie herzuleiten. Man kann dann mit dem Taschenrechner schnell ausrechnen, wie die Genauigkeit der Zahl $\pi$ zunimmt. Für z. B. $n=1000$ ist das schon beeindruckend.

## Einbeschriebenes regelmäßiges $n$-Eck mit dem Flächeninhalt $F_{i}$


$\varepsilon=\frac{360^{\circ}}{n} ; r_{n}=r$
$\mathrm{F}_{\mathrm{i}}=\mathrm{n} \cdot \mathrm{F}_{\mathrm{n}}$
$F_{i}=n \cdot \frac{\rho_{n} \cdot a_{n}}{2}$
$\rho_{\mathrm{n}}=\mathrm{r} \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2}$
$\mathrm{a}_{\mathrm{n}}=2 \cdot r \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2}$
$\mathrm{F}_{\mathrm{i}}=\mathrm{n} \cdot \mathrm{r}^{2} \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2}$

$$
F_{i}=r^{2} \cdot n \cdot \cos \frac{180^{\circ}}{n} \cdot \sin \frac{180^{\circ}}{n}
$$

für $n \rightarrow \infty$ geht $n \cdot \cos \frac{180^{\circ}}{n} \cdot \sin \frac{180^{\circ}}{n}$ gegen $\pi$.

## Umbeschriebenes regelmäßiges n -Eck mit dem Flächeninhalt $F_{a}$


$\varepsilon=\frac{360^{\circ}}{\mathrm{n}}$
$\mathrm{F}_{\mathrm{a}}=\mathrm{n} \cdot \mathrm{F}_{\mathrm{n}}{ }^{*}$
$\mathrm{F}_{\mathrm{a}}=\mathrm{n} \cdot \frac{\mathrm{r}_{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{a}_{\mathrm{n}}{ }^{*}}{2}$
$\mathrm{a}_{\mathrm{n}}{ }^{*}=2 \cdot \mathrm{r}_{\mathrm{n}} \cdot \tan \frac{\varepsilon}{2}$
$a_{n}=2 \cdot r_{n} \cdot \tan \frac{180^{\circ}}{n}$
$\mathrm{F}_{\mathrm{a}}=\mathrm{r}_{\mathrm{n}}{ }^{2} \cdot \mathrm{n} \cdot \tan \frac{180^{\circ}}{\mathrm{n}}$ für $n \rightarrow \infty$ geht $n \cdot \tan \frac{180^{\circ}}{n}$ gegen $\pi$.

## Parcours 5:

Diese Methode lässt sich nicht verfeinern, denn wenn man aus 9 Teilquadraten durch weitere Halbierung dann 36 Teilquadrate herstellt, so sieht man sehr schnell, dass man kein Polygon herstellen kann, wie es bei den 9 Teilquadraten der Fall ist. Natürlich kann man einen Polygonzug einzeichnen, doch ist der viel schlechter als der bei den 9 Teilquadraten. Immerhin führt die Methode zu einem Wert von $99 \%$ des Wertes von $\pi$.

## Didaktisch-methodische Hinweise

## Parcours 6:

Auch hier lässt sich eine Verfeinerung durchführen. Da die frühen Ägypter mit $\pi=3,0$ gerechnet haben, kann der Wert nicht so schlecht sein. Er ist immerhin 95,5 \% des Wertes von $\pi$. Die Griechen rechneten in Kenntnis der Bruchzahlen mit $\pi=\frac{22}{7}$, das sind schon 99,9 \%.

## Parcours 7:

Obwohl die Methode sehr einfach ist, ist der Wert bei dieser Unterteilung recht genau, nämlich 100,6 \% vom Wert von $\pi$.

## Parcours 8 und 9:

Wegen der Handlichkeit sollte man den Schülern und Schülerinnen kein dünnes Papier, sondern mindestens 160 g-Papier geben, da man es besser fassen und legen kann. Parcours 9 kann nur zu dem Ergebnis führen, dass man drei r-Quadrate und ein »bisschen« mehr braucht, um die Kreisfläche auszulegen. Insofern ist die Methode genauso gut wie die der alten Ägypter.

## Parcours 10:

Wenn die Möglichkeit besteht, sollte man den Zylinder und die Quadratsäule aus gleichem Material (z. B. Holz) vielleicht im Technikunterricht erstellen lassen. Bei diesem Verfahren kann man schnell dem Fehlschluss erliegen, dass man mit einer supergenauen Waage die Zahl $\pi$ genauer bestimmen kann. Wenn die Massen der Kreis- und der Quadratscheibe aber ungenau gefertigt worden sind, nützt auch die beste Waage nichts. Umgekehrt ist es natürlich ebenso.

## Parcours 11:

An diesem Parcours werden zwei Methoden nebeneinander benutzt, die auf den ersten Blick den Charakter eines Grenzübergangs haben.

1. Die Verfeinerung des Gitters.
2. Die Erhöhung der Anzahl der durch die Koordinaten markierten Gitterquadrate.

Der letzte Aspekt ist eigentlich sehr einsichtig, denn je mehr Gitterquadrate man markiert, desto genauer wird der Quotient für die Zahl $\pi$. Je mehr Zufallsziffern man nimmt und daraus die Koordinatenpaare bildet, desto mehr Gitterquadrate kann man markieren, und nach dem Gesetz der großen Zahlen werden irgendwann alle Gitterquadrate markiert sein. Das kann aber nicht Sinn der Methode sein, denn dann ist man wieder beim Parcours 8. Problem: Was macht man mit den eventuell doppelt markierten Gitterquadraten? Zählt man sie nur einfach oder doppelt oder gar in der Häufigkeit, in der sie markiert worden sind? Der Trick dieser statistischen Methode liegt ja gerade darin, so viele Gitterquadrate wie notwendig und so wenig wie möglich zu nehmen. Eine individuelle Entscheidung eines jeden Schülers ist hier notwendig, welch tolle Situation. Also kein Grenzübergang.

## Didaktisch-methodische Hinweise

Der erste Aspekt ist nicht so ganz einfach zu entscheiden. Angenommen, man markiert immer 100 Gitterquadrate unabhängig von der Feinheit des Gitters. Dann ist unmittelbar klar, dass immer weniger markierte Gitterquadrate auf dem Kreisrand liegen werden. Die Entscheidungshäufigkeit »liegt innerhalb bzw. außerhalb der Kreisfläche« nimmt ab, wenn das Gitterquadrat auf dem Kreisrand liegt, und das wechselseitige Zuordnen zu »innerhalb bzw. außerhalb der Kreisfläche«, wenn das Gitterquadrat »genau« auf dem Kreisrand liegt, nimmt ebenfalls ab. Das Ergebnis für $\pi$ müsste eigentlich besser werden. Bei genügend großer Verfeinerung des Gitters dürfte irgendwann einmal kein Gitterpunkt mehr auf dem Kreisrand liegen. Das muss aber nicht sein, denn die ständige Verfeinerung des Gitters bringt eine ständige Verlängerung der Koordinaten des betreffenden Gitterquadrates mit sich, und das ist nichts anderes als eine Intervallschachtelung des Gitterquadrates, und jede kann durchaus einen Punkt auf dem Kreis definieren. Das ist zwar ein Grenzübergang, aber der bringt bei endlicher Anzahl von Gitterquadraten (Punkten) keine prinzipielle Verbesserung des angestrebten Wertes von $\pi$. Diese ist nur erreichbar, wenn man mit der Verfeinerung des Gitters auch die Anzahl der markierten Gitterquadrate erhöht.

## Parcours 12, Parcours 13

Auch diese Parcours benutzen den Gedanken eines Grenzübergangs. Die eigentlichen Schwierigkeiten beginnen nach Gleichung VI, wenn $\mathrm{h}_{\mathrm{n}}$ bestimmt werden soll. Man kann das Problem umgehen, wenn man den Schülerinnen und Schülern klar machen kann, dass beim Übergang für $n \rightarrow \infty h_{n} \rightarrow r$ geht. Das führt von
Gleichung VII $\quad A_{n}=n \cdot s_{n} \cdot \frac{h_{n}}{2} \quad$ zur Gleichung $\quad A_{\text {Kreis }}=u_{\text {kreis }} \cdot \frac{r}{2}$.
In der vorletzten Gleichung steckt noch ein gedankliches Problem: Wenn $\mathrm{s}_{\mathrm{n}} \rightarrow 0$ geht, was macht dann der Term $n \cdot \mathrm{~s}_{\mathrm{n}}$, da n doch gegen $\infty$ strebt? Natürlich strebt dieser Ausdruck gegen $\mathrm{u}_{\text {kreis }}$, aber ein unwohles Gefühl bleibt, denn $\mathrm{u}_{\text {kreis }}$ ist eine ganz bestimmte Zahl.
So ist es vielleicht sicherer, von der
Gleichung $\quad A_{n}=u_{n} \cdot \frac{h_{n}}{2}$ aus zu argumentieren.
Für $h \rightarrow r$ führt alles zur gewünschten
Gleichung $\quad A_{\text {Kreis }}=u_{\text {Kreis }} \cdot \frac{r}{2}$ und

$$
A=r^{2} \cdot \pi
$$

Wegen der oben genannten Schwierigkeiten gibt es zwei Versionen des Verfahrens, wobei Parcours 13 das »leichtere« Verfahren anbietet.
Weitere Verfahren zur Kreisberechnung und zur Zahl $\pi$ findet man in
Mathematik Gestern und heute: Historische Verfahren zeitgemäß aufbereitet
Kohl-Verlag (ISBN 978-3-96040-022-6):
Wie Archimedes $\pi$ bestimmte, Wie der Bischof von Brixen $\pi$ bestimmte,
Wie C. F. Gauß $\pi$ bestimmte, Wie man zufällig auf $\pi$ kommt,
Wie der Prediger John Wallis $\pi$ bestimmte, Die Kreiszahl $\pi$ im Laufe von Jahrhunderten, Zur Quadratur des Kreises.

## Die Berechnung der Kreisfläche Laufzettel Name: <br> $\qquad$

| Stations- <br> nummer | erfolgreich <br> bearbeitet? | Deine Meinung und Bemerkungen <br> zu dieser Station |
| :--- | :---: | :---: |


| 1 |  |  |
| ---: | ---: | ---: |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |
| 7 |  |  |
| 8 |  |  |
| 9 |  |  |
| 10 |  |  |
| 11 |  |  |
| 12 |  |  |
| 13 |  |  |

## Parcours 1

## Berechnung der Kreisfläche über „Umbeschriebene« Rechtecke

## Suche dir einen Partner oder eine Partnerin!

## I. Beschreibung:

An dieser Station lernt ihr eine Näherungsmethode kennen, bei der man »umbeschriebene« Rechtecke benutzt, um die Flächenformel für den Kreis zu erarbeiten. Um es etwas einfacher zu machen, arbeitet ihr zuerst nur an einem Viertelkreis (siehe Zeichnung).

Vorbemerkung: Wenn du schon Parcours 2 erfolgreich bearbeitet hast, wird Parcours 1 ein geistiger Spaziergang sein. Dazu solltest du die Zeichnungen von Parcours 1 und 2 genau ansehen, am besten nebeneinander.
Dir wird einiges auffallen!

## II. Materialliste:

entfällt

## III. Arbeitsanweisungen:

1. Du musst zuerst die Flächen der Rechtecke $A_{1}, A_{2}, \ldots, A_{10}$ berechnen.

> Formel fürden Flächeninhalt des Rechtecks
> $\mathbf{A}_{\text {Rechteck }}=\quad \bullet$
2. Dazu brauchst du die beiden Seiten

$$
\begin{aligned}
& a=\frac{r}{10} \\
& b=y_{1}, y_{2}, y_{3}, \ldots, y_{9}
\end{aligned}
$$

Die Länge von $\mathrm{y}_{0}$ ist klar. $\mathrm{y}_{0}=\quad$ (kann man ablesen)
3. Als Beispiel werde ich dir einen Wert y mit $\mathrm{n}=3$ vorrechnen, damit es nicht so schwer ist. $y_{3}$ brauchst du zur Berechnung von $\mathrm{A}_{4}$. Die anderen y-Werte kannst du dann selber berechnen.
Eine Hilfe ist schon eingezeichnet, der Radius r.
Zur Berechnung von $y_{3}$ (und für die anderen y auch) brauchst du den Satz des $\qquad$ (1. Hilfe?).
4. Suche in der Zeichnung die drei charakteristischen Seiten für dieses Dreieck (2. Hilfe?) und setze sie in die Gleichung für den Satz des $\qquad$ ein.

# Stationenlernen Rund um den Kreis 

1. Digitalauflage 2016
© Kohl-Verlag, Kerpen 2016
Alle Rechte vorbehalten.
Inhalt: Wolfgang Schlottke \& Hans J. Schmidt
Umschlagbild: © DURIS guillaume - fotolia.com
Cliparts: © clipart.com
Grafik \& Satz: Kohl-Verlag

Bestell-Nr. P12 010

ISBN: 978-3-96040-615-0

# www.kohlverlag.de 

© Kohl-Verlag, Kerpen 2016. Alle Rechte vorbehalten.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt und unterliegen dem deutschen Urheberrecht. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages (§ 52 a Urhg). Weder das Werk als Ganzes noch seine Teile dürfen ohne Einwilligung des Verlages eingescannt, an Dritte weitergeleitet, in ein Netzwerk wie Internet oder Intranet eingestellt oder öffentlich zugänglich gemacht werden. Dies gilt auch bei einer entsprechenden Nutzung in Schulen, Hochschulen, Universitäten, Seminaren und sonstigen Einrichtungen für Lehr- und Unterrichtszwecke.
Der Erwerber dieses Werkes in PDF-Format ist berechtigt, das Werk als Ganzes oder in seinen Teilen für den Gebrauch und den Einsatz zur Verwendung im eigenen Unterricht wie folgt zu nutzen:

- Die einzelnen Seiten des Werkes dürfen als Arbeitsblätter oder Folien lediglich in Klassenstärke vervielfältigt werden zur Verwendung im Einsatz des selbst gehaltenen Unterrichts.
- Einzelne Arbeitsblätter dürfen Schülern für Referate zur Verfügung gestellt und im eigenen Unterricht zu Vortragszwecken verwendet werden.
- Während des eigenen Unterrichts gemeinsam mit den Schülern mit verschiedenen Medien, z.B. am Computer, via Beamer oder Tablet das Werk in nicht veränderter PDF-Form zu zeigen bzw. zu erarbeiten.

Jeder weitere kommerzielle Gebrauch oder die Weitergabe an Dritte, auch an andere Lehrpersonen oder pädagogischen Fachkräfte mit eigenem Unterrichts- bzw. Lehrauftrag ist nicht gestattet. Jede Verwertung außerhalb des eigenen Unterrichts und der Grenzen des Urheberrechts bedarf der vorherigen schriftlichen Zustimmung des Verlages. Der Kohl-Verlag übernimmt keine Verantwortung für die Inhalte externer Links oder fremder Homepages. Jegliche Haftung für direkte oder indirekte Schäden aus Informationen dieser Quellen wird nicht übernommen.

# GC15001-5G0(12.0) 

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus: <br> Stationenlernen Rund um den Kreis

Das komplette Material finden Sie hier:
School-Scout.de

## Stationenlernen

Rund um den Kreis


